**1.Элементарные функции, их алгебраическая классификация.** Пусть даны два непустых числовых множества Х и Y. Если каждому элементу x множества Х поставлен в соответствие (по некоторому закону f ) единственный элемент y множества Y, то говорят, что на множестве Х задана функция y=f(x) со значениями из множества Y. х – независимая переменная (аргумент); y – зависимая переменная (функция);множество X =D (y) – область определения функции;множество E (y) – область значений функции. **Способы задания функции**: 1) табличный;2) графический (график);3) аналитический, т.е. с помощью формулы. Можно выделить следующие три разновидности аналитического способа задания функции: – явный,неявный,параметрический;4)словестный;**Свойства функций одной переменной** 1. Четность и нечетность функции:f(-x)=f(x)-четная, f(-x)=-f(x)-нечет. 2. Периодичность функции. 3. Монотонность функции(возрастаю/убывающей) 4. Ограниченность функции. **Элементарные функции**. Основные элементарные функции:1) степенная ф-ция ;2) показательная функция ;3) логарифмическая функция y=logx,a>0,ax>0 ;4) тригонометрические функции y=sinx,y=cosx , y=tgx ,Y=ctg;5) обратные тригонометрические функции y=arcsinx ,y=arccosx, y=arctgx ,y=arcctgx . **Элементарными функциями**-все функции, которые можно получить из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических действий с применением действительных коэффициентов и образования сложной функции. Некоторые элементарные функции: 1) линейная функция y=ax+b.2) квадратичная функция y=a+bx+c. 3) многочлены с действительными коэффициентами (целые рациональные функции) 4) дробно-рациональные функции (рациональные дроби) – отношение многочленов: R(x)= . 5) иррациональные функции – функции, в которых используется операция извлечения корня. Некоторые неэлементарные функции: 1) функция сигнум – функция знака -y=signx=2) дробная часть y={x} =x-[x], где [x] означает целую часть x . 3) функция Дирихле D(x)={1, если х-рациональное,0 ,если х-иррациональное; Классификация элементарных функций:1) алгебраические функции, которые делятся на:1.1) рациональные функции, которые делятся на:1.1.1)многочлены ж;1.1.2)дробные рациональные функции R(x)=;1.2) иррациональные функции (содержащие корень любой степени).2) трансцендентные – функции, не являющиеся алгебраическими. Примерами трансцендентных функций являются: тригонометрические и обратные тригонометрические, показательные и логарифмические функции.

**2. Определение предела функции (на языке окрестностей, на языке последовательностей, на языке «ε − δ»).**Окрестностью O(a)конечной точки а называется любой интервал, содержащий эту точку: O(a)=(α,β), , если a. **ε**-окрестностью O(a) точки а при **ε**>0 называется интервал вида(a-**ε,**a+**ε** ), т. е. множество точек x, удовлетворяющих неравенству |x-a| <**ε**.Если из окрестности O(a) саму точку aR удалить, то получим соответственно проколотую O(a) окрестность этой точки. Проколотая окрестность точки а - это множество точек x, удовлетворяющих двойному неравенству 0<|x-a|<**ε**. Интервалы вида (a-**ε,a)** и (a, a+**ε)** называются соответственно левосторонней и правосторонней окрестностями точки a. Окрестность бесконечно удаленной точки: где p - любое действительное число; где q - любое действительное число;q > p - любые действительные числа;, где **ε>**0, т.е. множество точек, удовлетворяющих неравенству |x|>**ε**. **Понятие предела функции.** Пусть функция y=f(x) определена в некоторой проколотой окрестности O(a) точки а. Определение. Число b называется пределом функции y=f (x) при x a , если для любой окрестности O (b)точки b найдется такая проколотая окрестность O(a) точки а, что как только x O(a), то f(x) B(b), что обозначается или f(x) b при x a(f(x) стремится к b при x, стремящемся к а). Здесь точки а, b могут быть как конечные, так и бесконечные. Следует отметить, что для существования предела функции при x a не требуется, чтобы функция была определена в точке а. При

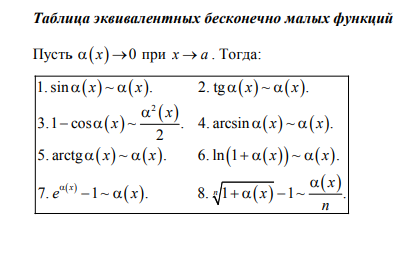
нахождении предела рассматриваются значения функции в точках из окрестности точки а, отличные от а. Определение. Если значения функции y=f (x) стремятся к пределу при xa , причем х принимает только значения меньше а, то записывают и называют пределом слева в точке а. Если х принимает только значения большие чем а, то записывают и называют пределом справа в точке а. Для существования конечного предела b функции y=f(x) при x a необходимо и достаточно, чтобы существовали и были равны оба односторонние пределы.

**3. Основные свойства пределов. Односторонние пределы, их связь с пределом функции. Понятие предела функции.** Пусть функция y=f(x) определена в некоторой проколотой окрестности O(a) точки а. Определение. Число b называется пределом функции y=f (x) при x a , если для любой окрестности O (b)точки b найдется такая проколотая окрестность O(a) точки а, что как только x O(a), то f(x) B(b), что обозначается или f(x) b при x a(f(x) стремится к b при x, стремящемся к а). Здесь точки а, b могут быть как конечные, так и бесконечные. Следует отметить, что для существования предела функции при x a не требуется, чтобы функция была определена в точке а. При

нахождении предела рассматриваются значения функции в точках из окрестности точки а, отличные от а. Определение. Если значения функции y=f (x) стремятся к пределу при xa , причем х принимает только значения меньше а, то записывают и называют пределом слева в точке а. Если х принимает только значения большие чем а, то записывают и называют пределом справа в точке а. Для существования конечного предела b функции y=f(x) при x a необходимо и достаточно, чтобы существовали и были равны оба односторонние пределы. Предположим, что существуют конечные пределы функций f(x) и g(x) при x → a , тогда: а) б); в)=c\*, где с=соnst – постоянная; г) , если lim g(x) ≠0 . Для всех элементарных функций , если а – внутренняя точка области определения. Если а – граничная точка области определения, то равенство верно для односторонних пределов. Лемма о сжатой переменной (двух «милиционерах»). Если в некоторой окрестности O a( ) ο для функций f(x),u(x), g(x) выполняется неравенство f(x)≤u(x) ≤g(x) и существуют (конечные) пределы , то существует также равный b. Предельный переход в неравенствах: если в некоторой окрестности O(a) ο для функций f(x) и g(x) выполняется неравенство f(x )≤g (x) и существуют (конечные) пределы, то ≤ Следует отметить, что строгое неравенство может переходить в равенство: если в некоторой окрестности O(a) для функций f(x) и g(x) выполняется неравенство f(x) < g(x) и существуют (конечные) пределы, то ≤ .

**4. Бесконечно малые функции и их свойства. Примеры.** Функция y= α(x) называется бесконечно малой (бмф) при x→a , если =0 . Пример. Функция y=4-x является бмф при x → 4, т. к. . Основная теорема о (конечном) пределе: для того чтобы при x→a существовал (конечный) предел функции y=f(x), необходимо и достаточно, чтобы в некоторой (достаточно малой) проколотой окрестности O (a) предельной точки а выполнялось равенство f(x)=b + α(x), где α( x) – бмф при x→a , x∈O(a), т. е. ⇔ f(x)=b+α(x) . Сравнение бесконечно малых функций производится путем нахождения предела их отношения. Пусть α(x) и β(x) – бмф при x→a, причем . Тогда если: 1) А = 1, то α( x) и β( x) называются эквивалентными бмф при x→a , что записывается в виде α(x)~β(x); 2) A ≠ 0 и A ≠ ∞ , то α(x) и β(x) – бмф одного порядка малости при x→a; 3) A = 0, то β( x) есть бмф более высокого порядка малости, чем α( x) при x→a что записывается в виде β(x) =o(α(x)); 4) A = ∞ ,то α( x) есть бмф более высокого порядка малости, чем β( x) при x→a что записывается в виде α(x) =o( β(x)). Свойства бесконечно малых функций: 1. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций есть функция бесконечно малая. 2. Произведение бесконечно малой функции на ограниченную функцию есть функция бесконечно малая. 3. Если α(x)~β(x), то β(x)~α (x). 4. Если α(x) ~ β (x) и β(x) ~ γ(x), то α(x) ~γ(x) ( ) . 5. Если α(x) ~ β (x), то α(x) − β(x) =o(α(x)) =o(β(x)). 6. Если α(x)~α1(x) и β(x)~β1(x), то . Последнее свойство часто используется при нахождении пределов. Бесконечно малые множители, стоящие в числителе и знаменателе, удобно заменять им эквивалентными. Следует отметить, что частное от деления бмф не обязательно бесконечно малая функция.

5. Сравнение бесконечно малых функций. Таблица эквивалентных бесконечно малых. Сравнение бесконечно малых функций производится путем нахождения предела их отношения. Пусть α(x) и β(x) – бмф при x→a, причем . Тогда если: 1) А = 1, то α( x) и β( x) называются эквивалентными бмф при x→a , что записывается в виде α(x)~β(x); 2) A ≠ 0 и A ≠ ∞ , то α(x) и β(x) – бмф одного порядка малости при x→a; 3) A = 0, то β( x) есть бмф более высокого порядка малости, чем α( x) при x→a что записывается в виде β(x) =o(α(x)); 4) A = ∞ ,то α( x) есть бмф более высокого порядка малости, чем β( x) при x→a что записывается в виде α(x) =o( β(x)).

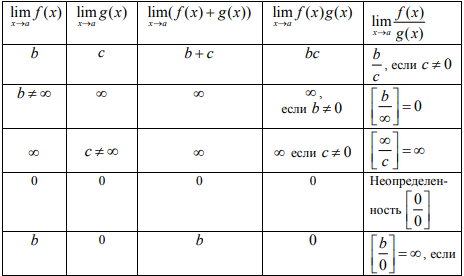


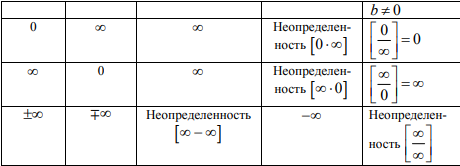
**6. Бесконечно большие функции, их свойства. Примеры.**

Функция y= β(x) называется бесконечно большой (ббф) при x→a , если = ∞ или = +∞. Свойства бесконечно больших функций. 1. Если в некоторой прололотой окрестности точки a функция α(x)≠ 0 и является бмф при x →a , то β(x) = 1/α(x) есть ббф при x→a и наоборот. Эти свойства символически записываются [1/0]= ∞ и [1/∞]=0 2. Произведение ббф на функцию |f (x)| >M ≠ 0 есть ббф. В частности, произведение бесконечно больших функций есть ббф. 3. Сумма бесконечно большой и ограниченной функций есть ббф. 4. Сумма двух ббф одинакового знака есть ббф. Следует отметить, что разность двух ббф одинакового знака не обязательно бесконечно большая функция.

**7. Первый замечательный предел. Второй замечательный предел.** Предел называется первым замечательным пределом. Следует иметь в виду и не путать с первым замечательным пределом следующие пределы: . Вторым замечательным пределом называется предел вида: =e, где е = 2,718281828459045…. Число е играет важную роль в математическом анализе. Показательная функция с основанием е, x y e = называется экспонентой. Логарифм по основанию е называется натуральным (или неперовым) логарифмом и обозначается ln x: ln x=. Из второго замечательного предела вытекают пределы : , которые широко применяются для раскрытия неопределенностей.

8. Методы раскрытия неопределенностей.





Неопределенность вида [0/0]. 1. Использование первого замечательного предела. При вычислении предела дроби, содержащей тригонометрические функции, в случае, когда предел и числителя, и знаменателя равен нулю, можно использовать первый замечательный предел или эквивалентные бесконечно малые. 2. При нахождении отношения двух многочленов P(x) и Q(x), если P(a)=Q(a) = 0, следует числитель и знаменатель дроби разделить на разность (x−a) один или несколько раз, пока не исчезнет неопределенность. 3. При раскрытии неопределенности [0/0] в случае иррациональных выражений в числителе и (или) знаменателе следует избавиться от иррациональности путем умножения на соответствующее сопряженное выражение или производя замену переменных. Неопределенность вида [∞/∞] . 1. При нахождении предела отношения двух многочленов P(x) и Q(x) при x → ∞ числитель и знаменатель дроби целесообразно разделить на , где n –высшая степень этих многочленов.2. При раскрытии неопределенности [∞/∞] в случае иррациональных выражений в числителе и знаменателе дроби выделяются множители , , где m n, – максимально возможные показатели степеней ((m n, )∈Q). Затем производится сокращение на (p=min(m,n)). Неопределенность вида . Для раскрытия неопределенности вида часто используется второй замечательный предел и следствия из него:. Неопределенности вида [∞ − ∞], [0 \*∞]. Неопределенности таких видов раскрываются сведением с помощью преобразований к неопределенностям [0/0] , [∞/∞] и другим.

9. Непрерывность функции в точке. Основные свойства функций, непрерывных в точке. Классификация точек разрыва. Функция y=f(x) называется непрерывной в точке x0 , если: 1) f(x) определена в точке x0 и некоторой ее окрестности; 2) . Т. к. =f(. Свойства функций, непрерывных в точке: 1. Если функции f(x) и g(x) непрерывны в точке x0 , то их арифметические комбинации: f(x)±g(x) , c\*f(x)(с–постоянная), f(x)\*g(x)и f(x)/g(x) (при условии что g(x0)≠0 ) также непрерывны в точке x0 . 2. Если функция u= φ(x) непрерывна в точке x0 , а функция y=f(u) непрерывна в точке u0= φ(x0), то сложная функция y= f (φ(x)) непрерывна в точке x0 . Если для функции y=f(x), определенной по крайней мере в некоторой проколотой окрестности точки x0 , не выполняется хотя бы одно из условий критерия непрерывности, то точка называется точкой разрыва функции. Точки разрыва функции классифицируются следующим образом. Точка x0 называется точкой: 1) устранимого разрыва функции y = f(x), если в этой точке существуют односторонние конечные пределы f (x0-0) и f(x0+0), они равны между собой: f(x0-0)=f(x0+0), но сама функция y=f(x) не определена в точке x0 , или определена, но ее значение не равно односторонним пределам: f(x0-0)=f(x0+0)≠0 ; 2) конечного разрыва (скачка) функции y=f(x), если в этой точке существуют конечные односторонние пределы f(x0-0) и f(x0+0), но они не равны между собой: f(x0-0)≠f(x0+0); 3) бесконечного разрыва (скачка) функции y y=f(x), если в этой точке хотя бы один из односторонних пределов бесконечен; 4) несуществования, если не существует. Если в точке устранимого разрыва функцию доопределить или значение сделать равным односторонним пределам, то функция в этой точке станет непрерывной. Точки устранимого и конечного разрывов называют точками разрыва I рода. Функция, которая на любом конечном интервале имеет конечное число разрывов I рода, называется кусочно-непрерывной (на этом интервале). Если хотя бы один из односторонних пределов 0 f (x0-0) − или f(x0+0) не существует или равен бесконечности, то точки разрыва называют точками разрыва II рода.

10. Свойства функций, непрерывных на отрезке. Теорема Вейерштрасса. Функция y=f(x) называется непрерывной на отрезке [a,b], если она непрерывна в каждой точке интервала (а,b) в точке a непрерывна 4 справа, а в точке b непрерывна слева. Свойства функций, непрерывных на отрезке 1. Основные элементарные функции непрерывны в области их определения; 2. Элементарные функции непрерывны на каждом из интервалов, целиком лежащих в области определения; 3. Если функция y=f(x) непрерывна на отрезке [a,b], то она ограничена на этом отрезке (первая теорема Вейерштрасса); 4. Если функция y=f(x) непрерывна на отрезке [a,b], то на этом отрезке она достигает своего наименьшего значения fнм и наибольшего значения fнб (вторая теорема Вейерштрасса); 5. Если функция y=f(x) непрерывна на отрезке [a,b] и f(a)=A, f(b)=B, то для любого числа С, заключенного между А и B, найдется такая точка c ∈[a;b], что f(c)=C (теорема Больцано-Коши о промежуточном значении);

11. Асимптоты графика функции. Под асимптотой кривой понимают прямую, расстояние до которой от точки, лежащей на кривой, стремится к нулю при неограниченном удалении от начала координат этой точки по кривой. Различают асимптоты вертикальные (параллельные оси Оу), горизонтальные (параллельные оси Ох) и наклонные. Утв 1.: Прямая х=х0 явл-ся вертикальной асимпт-ой граф y=f(x) если ф-ия определена в некоторой окр-ти х0 и хотя бы один из односторонних пределов равен бесконечности: ∞ или =∞ следовательно верт-ые асимптоты нужно искать в точках разрыва 2 рода. Замечание: ф-ия может иметь различные наклонные при x→±∞. Утв.2: Если сущ-ют конечные пределы =k =b, то прямая y=kx+b явл-ся правосторонней(левосторонней) наклонной асимптотой

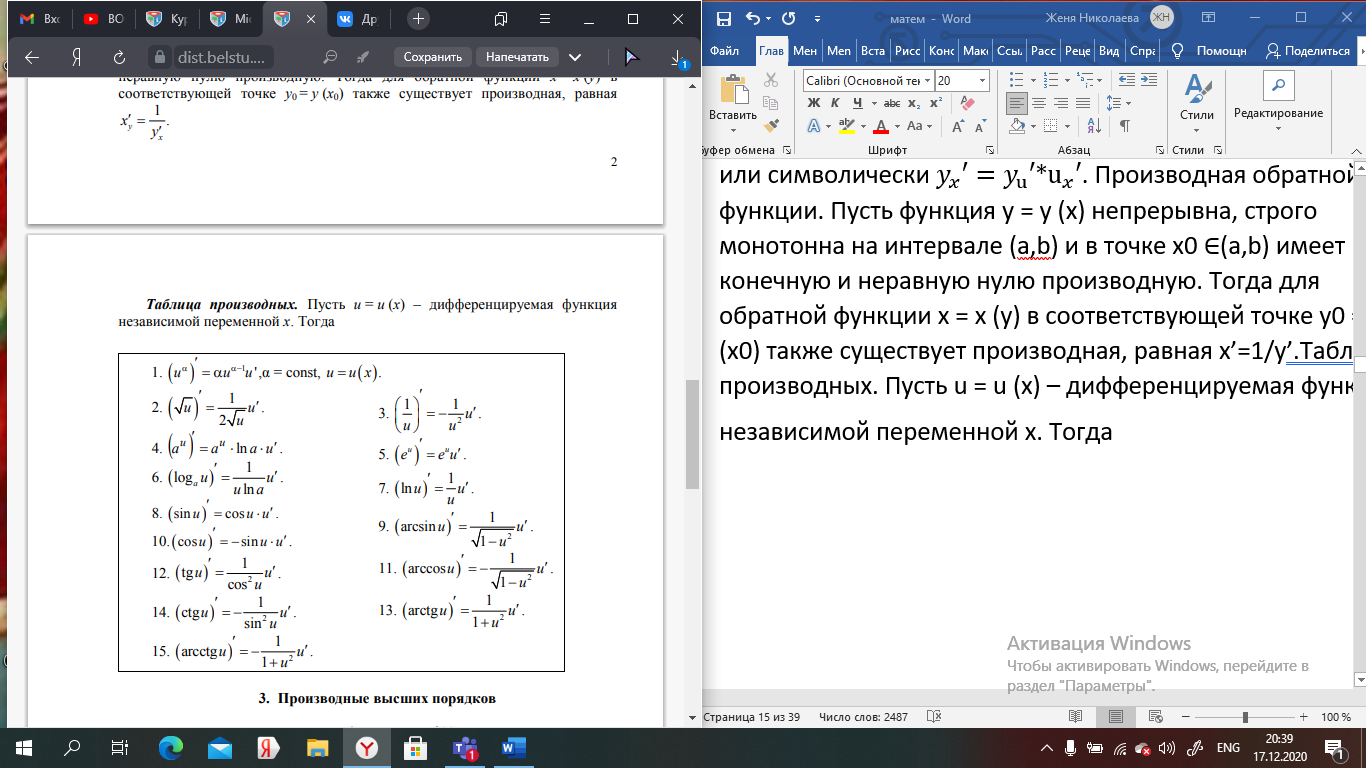
Замечание: горизонт-ая асимптота явл-ся чатсным случаем наклонной если k=0. Утв 3: Если сущ-ет конечный предел = b то прямая y=b явл-ся правостороими(левосторон-ими) гориз-ыми асимптотами

Замечание: если хотя бы один из пределов не сущ-ет или равен беск-ти, то собственно наклонной асимптоты не сущ-ет. Схема нахождения асимптот графика функции: 1. Найти область определения и интервалы непрерывности; 2. Определить тип точки разрыва (если она есть); 3. Записать уравнение вертикальных асимптот в случае наличия точки разрыва 2-го рода. 4. Найти наклонные асимптоты y = kx + b

**12. Определение производной. Основные правила дифференцирования.** Пусть функция y = f (x) определена на некотором интервале (a, b).Выберем точку x0 (a, b). Выберем другую точку x = x0 + Δx (a, b). Величина Δx= x-x0 называется приращением аргумента. Найдем соответствующее приращение функции Δy = f (x0 + Δx) – f (x0) = f(x)-f(x0). Производной функции y = f (x) в точке x0 называется предел отношения приращения функции Δy = f (x0 + Δx) – f (x0) к приращению аргумента Δx при

Δx 0, если этот предел существует и конечен;Для обозначения производной функции y = f (x) используют символы: y’, f‘(x), , , . Функция y = f (x) называется дифференцируемой в точке x0 , если ее приращение y = f (x0-)-f(x0) в этой точке представимо в виде Δy =AΔx + o() при 0, где o() – бесконечно малая более высокого порядка малости, чем при 0. Связь дифференцируемости функции и производной. Функция дифференцируема в данной точке тогда и только тогда, когда в этой точке существует конечная производная этой функции. Дифференцируемость функции в точке равносильна существованию производной функции в этой точке. Функция, имеющая конечную производную в каждой точке данного промежутка, называется дифференцируемой в этом промежутке, а операция нахождения производной называется дифференцированием. Связь дифференцируемости и непрерывности функции. Если функция дифференцируема в данной точке, то она непрерывна в ней. Обратное утверждение неверно, т. е. если функция непрерывна в точке, то она может быть не дифференцируема в этой точке. Основные правила дифференцирования. Пусть u = u (x) и v = v (x) –дифференцируемые функции независимой переменной x; c = const. Тогда 1. (с)’=0; (x)’=1. 2. (u\*v)’=u’ v+uv’.(cu)’=cu’;3.(u+v)’=u’+v’ ;4..Производная сложной функции. Рассмотрим сложную функцию вида y = y(u(x)), где y = y(u), u = u(x). Если функция u = u (x) дифференцируема в точке x0 и функция y =y (u)

дифференцируема в точке u0 = u (x0), то функция y = y(u(x)) дифференцируема в точке x0 и или символически . Производная обратной функции. Пусть функция y = y (x) непрерывна, строго монотонна на интервале (a,b) и в точке x0 (a,b) имеет конечную и неравную нулю производную. Тогда для обратной функции x = x (y) в соответствующей точке y0 = y (x0) также существует производная, равная x’=1/y’.Таблица производных. Пусть u = u (x) – дифференцируемая функция

независимой переменной x. Тогда

**13. Геометрический и механический смысл производной. Уравнение касательной.** Геометрический смысл производной:Уравнение касательной к графику функции y=f(x) в точке M(x0;f(x0)). f’(x0)=k=tga. Уравнение касательной к графику функции y = f (x) в точке x0 y=f(x0)+f’(x0)(x-x0)

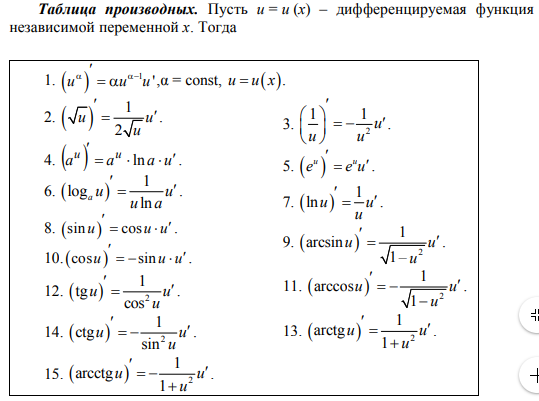
Замечание. В случае a=pi/2 уравнение касательной имеет вид: x=х0, касательная к графику функции параллельна оси Oy. Физический смысл производной: если функция s=s(t) выражает зависимость путь от времени, то производная выражает скорость в момент времени t: v(t)=s’(t), a(t)=s’’(t). В общем случае производная характерезует скорость изменения функции.

14. Понятие дифференцируемости, связь с производной и непрерывностью. Функция y = f (x) называется дифференцируемой в точке x0 , если ее приращение Δy f(x0+Δx )-f(x0) в этой точке представимо в виде Δy =AΔx + o(Δx) при Δx→0, где o(Δx) – бесконечно малая более высокого порядка малости, чем Δx при Δx →0 . Связь дифференцируемости функции и производной. Функция дифференцируема в данной точке тогда и только тогда, когда в этой точке существует конечная производная этой функции. Таким образом, дифференцируемость функции в точке равносильна существованию производной функции в этой точке. Функция, имеющая конечную производную в каждой точке данного промежутка, называется дифференцируемой в этом промежутке, а операция нахождения производной называется дифференцированием. Связь дифференцируемости и непрерывности функции. Если функция дифференцируема в данной точке, то она непрерывна в ней. Обратное утверждение неверно, т. е. если функция непрерывна в точке, 2 то она может быть не дифференцируема в этой точке.

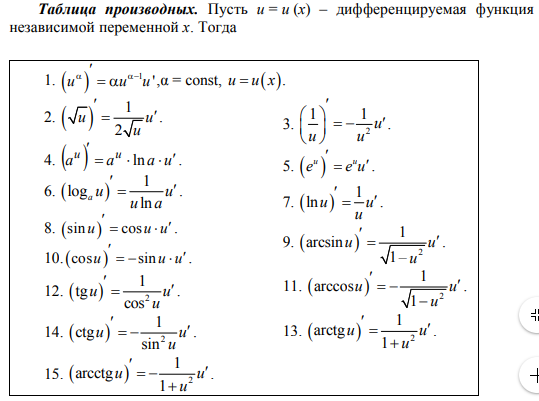
15. Понятия производной и дифференциала, связь между ними. Производной функции y = f (x) в точке x0 называется предел отношения приращения функции Δy = f (x0 + Δx) – f (x0) к приращению аргумента Δx при Δx 0, если этот предел существует и конечен;Для обозначения производной функции y = f (x) используют символы: y’, f‘(x), , , . Связь дифференцируемости функции и производной. Функция дифференцируема в данной точке тогда и только тогда, когда в этой точке существует конечная производная этой функции. Таким образом, дифференцируемость функции в точке равносильна существованию производной функции в этой точке. Функция, имеющая конечную производную в каждой точке данного промежутка, называется дифференцируемой в этом промежутке, а операция нахождения производной называется дифференцированием.

16. Производная сложной функции. Производные степенной, показательной и логарифмической функций.

Производная сложной функции. Рассмотрим сложную функцию вида y = y(u(x)), где y = y(u), u = u(x). Если функция u = u (x) дифференцируема в точке x0 и функция y =y (u) дифференцируема в точке u0 = u (x0), то функция y = y(u(x)) дифференцируема в точке x0 и или символически . Пусть n – некоторое вещественное число, х – переменная , a - число, то Производная степенной ф-ии : (x^n)’ = nx^n – 1; Производная показательной ф-ии: (a^x)’ = ax ln(a) ; (ex)’ = ex; Производная логарифмической ф-ии: (ln x)’ = 1/x ; (logax)’ = 1/x \*ln( a)



17. Производные тригонометрических и обратных тригонометрических функций. Производная обратной функции.



Производная обратной функции. Пусть функция y = y (x) непрерывна, строго монотонна на интервале (a,b) и в точке имеет конечную и неравную нулю производную. Тогда для обратной функции x = x (y) в соответствующей точке y0 = y (x0) также существует производная, равная

18. Дифференцирование неявно и параметрически заданных функций. Логарифмическое дифференцирование.

Под неявным заданием функции понимают задание функции в виде уравнения F(x;y)=0, не разрешенного относительно у. Если неявная функция задана уравнением F(x; у)=0, то для нахождения производной от у по х нет необходимости разрешать уравнение относительно у: достаточно продифференцировать это уравнение по x, рассматривая при этом у как функцию х, и полученное затем уравнение разрешить относительно у'. Производная неявной функции выражается через аргумент х и функцию у. Пусть функция задана в параметрической форме, то есть в виде:{x=x(t);y+y(t) , где функции и определены и непрерывны на некотором интервале изменения параметра . Найдем дифференциалы от правых и левых частей каждого из равенств:{dx=x’dt;dy=y’dtДалее, разделив второе уравнение на первое, и с учетом того, что , получим выражение для первой производной функции, заданной параметрически: Для нахождения второй производной выполним следующие преобразования:; Суть такого дифференцирования заключается в следующем: вначале находится логарифм заданной функции, а уже затем вычисляется от него производная. Пусть задана некоторая функция y=f(x). Прологарифмируем левую и правую части данного выражения: lny=lnf(x); Далее продифференцируем полученное равенство при условии, что y является функцией от x, то есть найдем производную сложной функции: (lny)’=(lnf(x))’=> (1/y)\*y’=(lnf(x))’; А тогда, выражая искомую производную y′, в результате имеем: y’=y\*(lnf(x))’

19. Дифференциал функции, свойство инвариантности формы дифференциала 1-го порядка. Если функция y=f(x) дифференцируема в точке x0, то её приращение Δy = f(x0+Δx)-f(x0) в этой точке представимо в виде Δy =f′(x0)Δx + ο(Δx) при Δx →0. Дифференциалом функции y=f(x) в точке x0 называется главная линейная относительно Δx часть приращения функции в этой точке. Дифференциал обозначается dy (или df(x)) и равен произведению производной функции на приращение аргумента:dy=f′(x0)Δx .Так как дифференциал независимой переменной x равен приращению этой переменной: dх = x′Δx = Δx , то dy=f’(x0)dx… Дифференциал функции имеет один и тот же вид: произведение производной по некоторой переменной на дифференциал этой переменной - независимо от того, является ли эта переменная, в свою очередь, функцией другой переменной или она является независимой переменной.

20. Теорема Ферма, ее геометрический смысл. Теорема Ферма. Если точка x0 является точкой локального экстремума функции y=f(x) и функция дифференцируема в точке x0 , то производная этой функции в этой точке обращается в нуль: f′(x0) =0. Геометрическая интерпретация: в точке локального экстремума касательная к графику функции параллельна оси Ox (оси абсцисс).

21. Теорема Ролля, ее геометрический смысл. Теорема Ролля. Пусть функция f(x) удовлетворяет условиям: 1) определена и непрерывна на отрезке [a,b]; 2) дифференцируема на интервале (a,b);3) значения функции на концах промежутка совпадают: f(a)=f(b). Тогда внутри промежутка найдется (по крайней мере одна) точка c∈(a,b), в которой производная функции обращается в ноль: f′(c)=0. Символически: ∃ ∈(a,b) ⇒ f’(c)=0. Геометрический смысл теоремы Ролля. На графике функции найдется хотя бы одна точка C(c,f(c)), в которой касательная к графику функции параллельна оси Ox.

22. Теорема Лагранжа, ее геометрический смысл. Теорема Коши. Теорема Лагранжа. Пусть функция f(x) непрерывна на отрезке [a,b] и дифференцируема на интервале (a,b). Тогда найдется такая точка c∈(a,b) что имеет место формула конечных приращений в форме Лагранжа: f(b)-f(a)=f’(c)(b-a). (Приращение дифференцируемой функции на отрезке [a,b] равно приращению аргумента, умноженному на производную функции в некоторой внутренней точке отрезка) Геометрический смысл теоремы Лагранжа. На графике функции найдется хотя бы одна точка С(c,f(с)), в которой касательная к графику функции параллельна секущей АВ. Теорема Коши. Пусть функции f(x) и g(x) непрерывны на отрезке [a,b] и дифференцируемы на интервале (a,b), причем g’(x)≠0,x∈(a,b), тогда найдется такая точка c∈(a,b) что имеет место следующая формула конечных приращений в форме Коши: Замечание. Геометрическая интерпретация теоремы Коши такая же, как и теоремы Лагранжа, если ее применить к функции y=y(x), заданной параметрически: x=g(t),y=f(t). Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши объединяются общим названием теорем о среднем для дифференцируемых функций.

23. Правило Лопиталя. Правило Лопиталя применяется для раскрытия неопределённостей вида 0/0 , ∞/∞ и других, сводящихся к ним. Пусть функции f(x) и g(x) дифференцируемы в проколотой окрестности точки a , и , или =∞ и = ∞. Пусть g′(x) ≠ 0 в проколотой окрестности точки a . Если существует (конечный или бесконечный) предел , то Замечание. Правило справедливо и в случае, когда x → ∞ . Неопределённости вида ∞⋅0 , ∞ − ∞, 1^∞ , ∞^0 , 0^0 приводятся с помощью тождественных преобразований к неопределённостям 0/0 , ∞/∞ .

24. Сравнение роста показательной, степенной и логарифмической функций при x → +∞.

25. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа и Пеано. Если функция *f*(*x*) имеет в точке *x*0 производную n-го порядка, то существует многочлен *Pn*(*x*) степени не выше n такой, что  
*Pn*(*x*0)=*f*(*x*0), *P*^*k*(*x*0)=*f*^k(*x*0), *k*=1,*n*.  
Этот многочлен представляется в виде  
*Pn*(*x*)=*f*(*x*0)+

26. Разложения функций e sin cos ln(1 ) (1 ) , , , , x x x x x α + + по формуле Маклорена.

27. Возрастание и убывание функции. Необходимое и достаточное условия монотонности (строгой монотонности) дифференцируемой функции на интервале.

Достаточное условие возрастания функции: Если в каждой точке интервала (a;b) ; f′(x) > 0 , то функция f(x) монотонно возрастает на этом интервале. Достаточное условие убывания функции Если в каждой точке интервала (a;b) ; f′(x) < 0 , то функция f(x) монотонно убывает на этом интервале. Точка x0 называется точкой локального максимума (минимума) если существует такая окрестность точки x0 , что для всех точек x ≠ x0 из этой окрестности выполняется неравенство f (x) ≤ f(x0) (соответственно, f (x) ≥ f(x0).

28.Точки локального экстремума функции. Необходимое и достаточные условия локального экстремума. Точки локального максимума и минимума называются точками локального экстремума, а значения функции в этих точках – экстремумами функции. Функция может иметь экстремум лишь во внутренних точках области определения. Слово ‹‹локальный›› часто опускают. Необходимое условие экстремума функции: Если x0 – точка экстремума функции y=f(x), то в этой точке производная либо равна нулю, либо не существует. Точки области определения функции y = f (x), в которых ее производная равна нулю (стационарные точки) или не существует, называются критическими точками (точками, подозрительными на экстремум) функции. Функция может иметь экстремум лишь в критических точках. Достаточные условия экстремума функции I. Если функция y=f(x) непрерывна в точке x0 и при переходе через эту точку производная меняет знак, то x0 – точка экстремума функции y= f(x), при этом: Если f(x)’>0 при x< x0, f′(x) < 0 при x > x0 , то x0 – точка максимума. Если f’(x)<0 при x< x0, f’(x)>0 при x>x0 , то x0– точка минимума. II. Если в точке x0 первая производная функции y=f(x) равна нулю, а вторая производная отлична от нуля, то x0 будет точкой экстремума, причем: 1)x0 – точка максимума, если f’’(x0)<0; 2)x0– точка минимума, если f’’(x0) >0 .

29. Алгоритм нахождения точек локального экстремума. Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на отрезке.

Схема исследования функции на монотонность и нахождения точек экстремума: 1. Найти область определения функции и интервалы, на которых функция непрерывна; 2. Найти производную f’(x).3. Найти критические точки, решив уравнение f′(x) = 0; 4. Определить знак производной в интервалах, на которые критические точки разбивают область определения функции; 5. Записать интервалы возрастания, убывания, экстремумы функции; 6. Построить эскиз графика; Наименьшее и наибольшее значения функции, непрерывной на отрезке: Функция, непрерывная на отрезке, достигает своего наименьшего и наибольшего значений на этом отрезке либо в критических точках, принадлежащих отрезку, либо на его концах. Схема нахождения наименьшего и наибольшего значений функции, непрерывной на отрезке: 1. Найти производную f′(x) 2. На данном промежутке найти критические точки, т.е. точки, в которых f′(x) = 0 или не существует. 3. Вычислить значения функции в критических точках и на концах промежутка.4. Из вычисленных значений выбрать наименьшее и наибольшее.

30. Выпуклость и вогнутость графика функции, точки перегиба. Говорят, что график дифференцируемой функции y=f(x) имеет на интервале (a;b) выпуклость, направленную вниз (вверх), если он расположен не ниже (не выше) любой касательной к графику функции на (a;b). Достаточные условия выпуклости графика функции Если функция y= f(x) имеет на интервале (a;b) вторую производную и f′′(x) >0 (f′′(x) < 0 ), то график функции имеет на (a;b) выпуклость, направленную вниз (вверх). Точка перегиба: Точки непрерывности функции, в которых меняется направление выпуклости, называются точками перегиба функции. Если x0 − точка перегиба функции y = f( x) , то точка М(x0,f(x0) ) называется точкой перегиба графика этой функции. Если x0 – точка перегиба, то f’’(x0) равна нулю или не существует. Точки непрерывности функции, в которых f′′(x) равна нулю или не существует, называются критическими точками 2-го рода. Если вторая производная функции y=f(x) при переходе через критическую точку x0 меняет знак, то x0 – точка перегиба

**31.Матрицыи действия над ними.** Матрицей размера m n называется прямоугольнаятаблица чисел (или других математических объектов) – элементовматрицы, расположенных в m строках и n столбцах. Матрицы обозначаются заглавными латинскими буквами и записываются в виде таблиц, ограниченных круглыми или квадратными скобками. Матрицу Amхn с элементами aij кратко записывают так: A=||a|| или A=[a] Основные операции над матрицами. Суммой матриц A и B одного и

того же размера называется матрица C такого же размера, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц A и B.Свойства операции сложения матриц:1. A+B=B+A(коммутативность).2. A+ (B+C)=(A+B)+C (ассоциативность). 3.A+O(ноль)=A; . Произведением матрицы A на число называется матрица C такого же размера, элементы которой равны соответствующим элементам матрицы A, умноженным на число. Свойства операции умножения матрицы на число. 1. (αβА) = (αβ) A (ассоциативность). 2. α(А+В) = αА + αВ(дистрибутивность сложения матриц относительно умножения на число). 3.(α + β)А = αА + βA(дистрибутивность сложения чисел относительно умножения на матрицу). 4. 1\*A=A;0\*A=O; O=O\*α.Опр. 9. Произведением матрицы A размера m×s на матрицу B размера s×n называется матрица C размера m×n. Умножение одной матрицы на другую возможно, если число столбцов первой равно числу строк второй, т. е. матрицы должны быть согласованными между собой, иначе такое произведение не существует.Согласно данному определению, произведение C=AB матриц A и B существует, если матрица A согласована с матрицей B в том смысле, что число столбцов первой из них равно числу строк второй. Свойства операции умножения матриц. 1. Существуют матрицы, для которых AB ≠ BA. (Умножение матриц не коммутативно.) 2. A(BC)= (AB)C= (ассоциативность). 3. A(B+C) =AB+AC;(A+B)C=AC+BC;(дистрибутивность).4.\*E(nxn)=E(mxn)\*A(mxn)=A(mxn); Матрица , A^T полученная из матрицы A заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется транспонированной к матрице A. Если исходная матрица имеет размер m × n, то транспонированная к ней будет иметь размер n × m. Свойства операции транспонирования матриц. 1. (A^T)^T=A 2. (A+B)^T= A^T+B^T 3. (αT)^T = α A^T (α – число). 4. (AB)^T=B^T\*A^T.

**32. Определители, их основные свойства.**

Для квадратных матриц вводится числовая характеристика – определитель (детерминант) матрицы. Определитель матрицы A обозначают det A,|A| или Δ. Записывают определитель в виде такой же таблицы, как и матрицу, используя вместо скобок вертикальные линии. Вычисление определителей. Определитель квадратной матрицы 1-го порядка равен своему элементу: если A = ( ), то detA = ( ). Определитель 2-го порядка вычисляется как произведение элементов, стоящих на главной диагонали, минус произведение элементов, стоящих на побочной диагонали; Определитель 3-го или более высокого порядка равен сумме произведений элементов 1-й строки определителя на их алгебраические дополнения. Введем необходимые определения. Пусть дан определитель n-го порядка. Минор элемента – это определитель (n −1)-го порядка, полученный из определителя путем вычеркивания i-й строки и j-го столбца, т. е. строки и столбца, в которых стоит элемент . Алгебраическим дополнением  элемента называется число .Определитель n-го порядка вычисляется по формуле

Кроме того, для определителей 3-го порядка имеет место правило треугольников, которое выражается формулой:

Свойства определителей 1. При транспонировании матрицы определитель не изменяется: det A= det A^T . Следствие. Все свойства определителей, сформулированные для строк, справедливы и для столбцов. 2. При перестановке двух строк определитель меняет знак. 3. Если у определителя какая-либо строка состоит только из нулей, то такой определитель равен 0. 4. Определитель, содержащий две одинаковые строки, равен 0. 5. Общий множитель элементов строки можно вынести за знак определителя. 6. Если к элементам какой-либо строки прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на одно и то же число, то определитель не изменится. 7 (теорема Лапласа). Определитель равен сумме произведений элементов любой строки на их алгебраические дополнения: 8 («фальшивое разложение»). Сумма произведений элементов какой-либо строки на алгебраические дополнения соответствующих им элементов другой строки равна 0:9. Сумма произведений алгебраических дополнений элементов какой-либо строки определителя на некоторые числа равна определителю, который получается из данного заменой указанной строки на числа. 10. Определитель матрицы, у которой все элементы под главной диагональю равны 0 (треугольной матрицы), равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали.

**33. Обратная матрица: определение, необходимое и достаточное условие существования, алгоритм нахождения.** Квадратная матрица называется невырожденной, если ее определитель не равен нулю ( det A ≠ 0). В противном случае ( det A = 0) матрица A называется вырожденной. Опр. 2. Матрица называется обратной для квадратной матрицы A, если A= A=E,где E – единичная матрица того же порядка, что и A. Замечание. Понятие обратной матрицы вводится только для квадратных матриц. Т 1 (необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы). Матрица A имеет обратную матрицу тогда, когда матриц A невырожденная (т. е. det A ≠ 0). Доказательство. Необходимость. Докажем, что если существует, то det A ≠ 0. По определению обратной матрицы,A=E. det(A)= det\*detA . Следовательно, det\*detA=1, откуда det= и A ≠0. Достаточность. Обратная матрица может быть найдена по формуле =.Для этого покажем, что матрица , определенная формулой, удовлетворяет соотношениям =E. Вычислим произведение:)); Умножая элементы i-й строки первой матрицы на соответствующие элементы j-го столбца второй и складывая найденные произведения, получаем т. е. получаем сумму произведений элементов j-го столбца исходной матрицы A на алгебраические дополнения соответствующих им элементов i-го столбца этой матрицы. По свойствам определителей,=0 если i ≠ j, и = detA; Поэтому Аналогично доказывается, что ))=E; Свойства обратных матриц. Если det A ≠ 0, то имеют место следующие соотношения. 1. det=;2. (=A;3. (α= (α – число). 4. =;5. ( =(.

**34. Ранг матрицы. Теорема Кронекера-Капелли.** Понятие ранга вводится для любых, не только для квадратных, матриц. Пусть A – матрица размера m × n. Минором порядка k матрицы A называется определитель k-го порядка, который получается на пересечении k произвольных строк и k произвольных столбцов матрицы A. Рангом матрицы называется наивысший порядок отличных от 0 миноров матрицы. Всякий отличный от 0 минор матрицы, порядок которого равен рангу матрицы, называется базисным минором этой матрицы. Замечание. Базисный минор матрицы не единственен. Ранг матрицы A обозначают rangA , rankA , rgA , rkA , r(A ). Свойства ранга матрицы :1.rang rang.2. При транспонировании ранг матрицы не изменяется: = rang A 3. rangA=0 ⇔ A– нулевая матрица. 4. rang=n ⇔det A0;5. rang(AB) min{rangA ; rangB}.Система m уравнений с n неизвестными Κ называется системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), если она имеет вид:{; СЛАУ удобно записывать в компактной матричной форме. СЛАУ эквивалентна матричному уравнению:AX=B; Т 1. СЛАУ, имеющая m уравнений с n неизвестными, совместна тогда , когда ранг расширенной матрицы системы равен рангу основной матрицы этой системы, rang A=rang при этом:

- если ранг матрицы совместной системы равен числу неизвестных: rang A=rang =n ,то система имеет единственное решение; - если ранг матрицы совместной системы меньше числа неизвестных: rang A=rang <n то система имеет бесконечно много решений. В случае, когда: rang A=rang <n, вводят понятия базисных(основных) и свободных (неосновных) переменных. Базисными неизвестными называются r неизвестных, коэффициенты при которых образуют базисный минор; остальные неизвестные – свободные. Поскольку базисный минор определяется неоднозначно, то и разделение на базисные и свободные переменные неоднозначно.

**35. Методы решения систем линейных алгебраических уравнений.** Система m уравнений с n неизвестными Κ называется системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), если она имеет вид:{; СЛАУ удобно записывать в компактной матричной форме. СЛАУ эквивалентна матричному уравнению:AX=B; Т 1. СЛАУ, имеющая m уравнений с

n неизвестными, совместна тогда и только тогда, когда ранг

расширенной матрицы системы равен рангу основной матрицы этой системы, rang A=rang при этом:

- если ранг матрицы совместной системы равен числу неизвестных: rang A=rang =n ,то система имеет единственное решение; - если ранг матрицы совместной системы меньше числа неизвестных: rang A=rang <n то система имеет бесконечно много решений. В случае, когда: rang A=rang <n, вводят понятия базисных(основных) и свободных (неосновных) переменных. Базисными неизвестными называются r неизвестных, коэффициенты при которых образуют базисный минор; остальные неизвестные – свободные. Поскольку базисный минор определяется неоднозначно, то и разделение на базисные и свободные переменные неоднозначно. Метод Гаусса Метод Гаусса. Он применим для решения любых СЛАУ. Процесс решения СЛАУ по методу Гаусса состоит из двух этапов. На первом этапе система приводится к равносильной системе ступенчатого, в частности треугольного вида, с помощью следующих преобразований: 1) перестановка двух уравнений; 2) умножение уравнения на число, отличное от 0; 3) прибавление к одному уравнению другого, умноженного на число. Если хотя бы в одном из этих уравнений свободный член отличен от нуля, то система несовместна. Если во всех этих уравнениях свободные члены равны нулю или таких уравнений нет, то система совместна. На втором этапе (обратный ход) идет последовательное определение неизвестных из полученной системы, начиная с последних по номеру. Если в полученной системе ступенчатого вида имеется хотя бы одно уравнение вида 0 = b, где b ≠ 0, то система несовместна. Пусть в полученной ступенчатой системе таких уравнений нет, обозначим через r количество уравнений ступенчатой системы, в которых не все коэффициенты левой части равны нулю, при этом r≤ n. Если r = n, то система имеет единственное решение. В этом случае из последнего уравнения находим , x затем, подставляя x в предпоследнее уравнение, находим x (n−1). Продолжая этот процесс, найдем единственное решение системы. Если в ступенчатой системе r<n, то из последнего уравнения системы выражаем одну переменную через остальные n −r переменных, которые в этом случае называются свободными. Затем подставляем полученное значение в предпоследнее уравнение и выражаем еще одну переменную через те же n −r свободных переменных. Продолжая этот процесс, выразим r неизвестных через свободные переменные. Придавая свободным переменным произвольные значения, получим бесчисленное множество решений системы. Замечание. Поскольку элементарные преобразования системы линейных уравнений равносильны элементарным преобразованиям над строками расширенной матрицы системы, на практике удобнее оперировать с матрицами. Если det A 0, СЛАУ может быть решена как матричное уравнение (матричным методом) или с помощью определителей (методом Крамера).

Опр. 7. СЛАУ, содержащая n уравнений с n неизвестными,

называется невырожденной, если ее матрица А невырождена, т. е. det A 0. В невырожденной системе количество уравнений равно количеству неизвестных. 1. Матричный метод (метод обратной матрицы) решения

СЛАУ. Если det A 0, решение уравнения, а значит, и

системы, может быть найдено по формуле X=A^-1\*B/

2. Метод Крамера. Определитель Δ составленный из коэффициентов при неизвестных в СЛАУ , называется определителем системы. Т 2 [Крамер, 1751]. Если определитель системы, содержащей n уравнений с n неизвестными, отличен от 0: Δ ≠ 0, то система имеет единственное решение, которое может быть найдено по формулам Крамера где – Δjопределитель, полученный из определителя Δ заменой j-го столбца на столбец свободных членов системы. Методы обратной матрицы и Крамера применимы для решения только тех систем, в которых количество уравненийравно количеству неизвестных и, кроме того, определитель

матрицы системы отличен от 0: detA≠ 0.

**36. Векторы. Линейные операции над векторами. Проекция вектора на ось, проекция вектора на вектор. Свойства проекций.** Вектор (свободный вектор) – это математический объект, характеризующийся величиной и направлением.Геометрическая интерпретация: направленный отрезок, который можно переносить параллельно самому себе. Вектор обозначается либо . Вектор, для которого указана начальная точка, называется связанным. Для свободного вектора точка его приложения при геометрическом изображении может быть

выбрана произвольно. **Модулем (длиной)** вектора называется длина отрезка, изображающего вектор. Длина вектора обозначается | либо |. Единичным называется вектор, длина которого равна единице. Единичный вектор обозначают обычно , | =1.Нулевой– вектор, длина которогo равна нулю. Два ненулевых вектора называются равными, если их модули и направления совпадают. Векторы , лежащие на одной или параллельных

прямых, называются коллинеарными и обозначаются a b.

Коллинеарные векторы могут быть одинаково направленными (сонаправленными): или противоположно направленными: .Опр. 7. Два коллинеарных вектора называются противоположными, если их модули равны, а направления противоположны. Вектор, противоположный вектору , обозначается -.Опр. 8. Векторы и , лежащие на перпендикулярных прямых, называются ортогональными и обозначаются . Опр. 9. Векторы, лежащие в одной или параллельных плоскостях, называются компланарными. Линейными операциями над векторами называют их сложение, вычитание, умножение вектора на число.Опр. 10. Суммой двух векторов и называется вектор =+,начало которого совпадает с началом вектора , а конец – с концом вектора , если начало вектора совпадает с концом вектора (по правилу треугольника). Если два вектора и приложить к одной начальной точке, то вектор =+ будет исходить из этой же точки и совпадать с диагональю параллелограмма, построенного на векторах и . Такой способ сложения векторов называется правилом параллелограмма.

Опр. 11. Разностью векторов и называется вектор

=-) равный сумме вектора и вектора , противоположного вектору . Если два вектора и приложить к одной начальной точке, то вектор =- будет совпадать с диагональю параллелограмма, построенного на векторах и , имея началом конец вектора, а концом – конец вектора . Опр. 12. Произведением вектора на число α называется вектор =, длина которого равна |=, а направление совпадает с направлением вектора , если α>0, и противоположно направлению вектора , если <0. Отсюда следует условие коллинеарности 2 векторов:=; Основные свойства линейных операций над векторами:1. = (коммутативность сложения). 2.= (ассоциативность сложения). 3. . =;4. . = ;5. 1\*=6.α(β )= (αβ(ассоциативность умножения на число).7. α=α (дистрибутивность сложения векторовотносительно умножения на число).8. =α(дистрибутивность сложения чисел относительно умножения на вектор).Эти свойства позволяют преобразовывать линейные выражения с векторами, как в обычной алгебре. Проекция вектора на ось. Пусть в пространстве задана некоторая ось l и вектор AB. Через точку А проведем плоскость, перпендикулярную оси l, при пересечении этой плоскости с осью l получим точку , которая называется проекцией точки А на ось l. Аналогично получим точку B1 – проекцию точки В на ось l. Опр. 13. Проекцией вектора AB на ось l называется число, равное |,если вектор и ось l сонаправлены, и - ,если противоположно направлены: пр={если если

Свойства проекций.1. пр=cosφ; 2. пр( )=.

3. пр( )=пр+пр ;4. пр =0 (либо a=0).

**37. Векторный базис на плоскости и в пространстве. Разложение произвольного вектора по базису. Координаты вектора.** Базисом на плоскости называются два линейно независимых вектора этой плоскости, взятые в определенном порядке. Базисом в пространстве называются три линейно независимых вектора, взятые в определенном порядке. Смысл понятия базис раскрывается в следующих теоремах. Если векторы и образуют базис на плоскости, то любой вектор этой плоскости может быть единственным образом представлен в виде линейной комбинации базисных векторов:;Такое представление называется разложением вектора c по базису {;}а коэффициенты x y , этого разложения называются координатами вектора в базисе {; };Т4. Если векторы образуют базис в пространстве, то любой вектор c пространства может быть единственным образом разложен по этому базису: тройка чисел x ,y, z называется координатами вектора в базисе {;;}.Три некомпланарных упорядоченных вектора , , приведенных к общему началу, называются тройкой векторов. Тройка векторов , , ,называется правой, если кратчайший поворот от первого вектора ко второму вектору виден из конца третьего вектора против часовой стрелки; а если по часовой стрелке, то тройка называется левой. Базис в пространстве называется ортонормированным, если все образующие его векторы имеют единичную длину и попарно перпендикулярны (ортогональны). Правая декартова прямоугольная система координат в пространстве определяется точкой O – началом координат и ортонормированным базисом векторы которого образуют правую тройку. Оси координат Ox, Oy, Oz сонаправлены соответственно с векторами I, j, k которые называются ортами.

**38. Длина вектора. Направляющие косинусы вектора. Единичный вектор заданного направления.**Пусть в пространстве задана прямоугольная декартова система координат Oxyz. Так как орты образуют базис, то любой вектор единственным образом раскладывается по этому базису: =x+y+z;Совместим начало вектора с началом координат, получим вектор =. Вектор называется радиус-вектором точки М. Обозначим через ,, проекции точки М на оси координат Ox, Oy, Oz соответственно. Тогда =пр\*; =пр\*; = пр\*;==++= пр\*+ пр\*+ пр\*; Следовательно, координаты вектора a в декартовой прямоугольной системе координат равны проекциям этого вектора на оси координат: x= ; у= ; z= Координаты радиус-вектора называются также координатами точки М, при этом координата x называется абсциссой, y –oрдинатой, z – аппликатой. По теореме о длине диагонали параллелепипеда получаем:; **Направляющие косинусы вектора**.Вектор (свободный вектор) полностью характеризуется своей длиной и направлением. Для того чтобы охарактеризовать направление вектора в пространстве, введем углы α, β, γ которые вектор образует с осями координат Ох, Оу, Oz соответственно. Косинусы этих углов cosα, cosβ , cosγ называются направляющими косинусами вектора . Пусть известны координаты вектора в декартовой прямоугольной системе координат: ={x; y;z}; т. е. =x+y+z. Так как координаты вектора равны его проекциям на оси координат, то по свойству проекций получаем: x=|;.Основное свойство направляющих косинусов:+. Вектор ={cosα ; cos β; cosγ} называется ортом или единичным вектором направления вектора , поскольку он сонаправлен с вектором и имеет длину, равную 1. Заметим, что:

**39. Скалярное произведение: определение, свойства, геометрические приложения, вычисление через координаты сомножителей. Условие ортогональности векторов.** Скалярным произведением векторов называется число (скаляр), равное произведению длин этих векторов на косинус угла ( между ними:Скалярное произведение векторов обычно обозначают *.*Свойства скалярного произведения.

1.=.2.=|.3.++ 4. =((; (– число).

4.

5. = .

6. = Пусть векторы заданы своими координатами в декартовой прямоугольной системе координат:={ x, y, z };b={ x, y, z } т. е.= x +y+ z ;Тогда в силу свойств получаем:= (x +y+ z=. Итак, скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений одноименных декартовых координат этих векторов:= . Геометрические и физические приложения скалярного произведения.1. Косинус угла между векторами:1);2. Проекция вектора на вектор: пр.= ;3. Длина вектора

|=;4. Условие ортогональности двух векторов:=0. 5. Работа постоянной по величине и направлению силы при перемещении материальной точки на вектор равна скалярному произведению силы и перемещения:

A= ;

**40. Векторное произведение: определение, свойства, геометрические приложения, вычисление через координаты сомножителей.** Векторным произведением вектора на вектор называется вектор , обладающий свойствами: 1) (длина вектора равна площади параллелограмма, построенного на векторах и );2) , ;3) векторы , в указанном порядке образуют правую тройку. Векторное произведение вектора на вектор ; обычно обозначают или Свойства векторного произведения: 1.=-.2.++ 3. =((; (– число).

4.

5. = .

6. =;

Выражение векторного произведения через координаты cомножителей. Пусть векторы заданы своими координатами в декартовой прямоугольной системе координат: ={ x, y, z };b={ x, y, z }; т. е.= x +y+ z ;Тогда в силу свойств векторного произведения получаем:= (x +y+ z=--. Итак, векторное произведение двух векторов может быть вычислено как определитель, в первой строке которого стоят базисные векторы . , а во второй и третьей – декартовы координаты соответственно первого и второго перемножаемых векторов:= . Итак

**Геометрические и физические приложения векторного произведения:**1. Площадь параллелограмма, построенного на векторах , равнаS =|;2. Площадь треугольника, построенного на векторах , равнаS =|; 3. Момент силы , приложенной в точке A, относительно точки О равен =

**41. Смешанное произведение: определение, свойства, геометрические приложения, вычисление через координаты сомножителей. Условие компланарности векторов.** Смешанным произведением векторов , называется число, равное скалярному произведению вектора на вектор :=). В смешанном произведении :=) сначала первый вектор умножается векторно на второй , а затем полученный результат скалярно умножается на третий вектор . Смешанное произведение векторов обычно обозначают: или ;). Выражение смешанного произведения через координаты сомножителей: Пусть векторы аданы своими координатами в декартовой прямоугольной системе координат: ={ x, y, z };b={ x, y, z };с={ x, y, z };Тогда, выражая координаты вектора и находя скалярное произведение векторов как сумму произведений их соответствующих координат, имеем:=)=.-

(В последнем равенстве свернули разложение определителя по элементам третьей строки.) Итак, смешанное произведение трех векторов равно определителю, составленному из декартовых координат перемножаемых векторов:=. Пусть векторы и заданы своими координатами в декартовой прямоугольной системе координат: ={x, y, z}, x, y, z}. Тогда , =α ⇔ ;

**42. Прямая на плоскости. Различные виды уравнений прямой на плоскости. Расстояние от точки до прямой на плоскости.** Прямая на плоскости может быть задана двумя точками либо точкой и направляющим вектором. С другой стороны, аналогично плоскости в пространстве, прямая на плоскости однозначно определяется точкой, лежащей на ней, и вектором, перпендикулярным прямой. Рассмотрим различные способы записи уравнения прямой на плоскости. 1. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки , записывается из условия коллинеарности векторов и где M (x, y) – произвольная точка этой прямой. В этом случае уравнение прямой имеет вид ; 2. Каноническое уравнение прямой записывается как уравнение прямой, проходящей через данную точку параллельно заданному вектору s ={ m; n }(направляющему вектору

прямой) ; 3. Параметрические уравнения прямой на плоскости имеют вид{x=. 4. Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно заданному вектору n ={ A; B }, записывается из условия ортогональности векторов n и , где M(x;y) – произвольная точка на прямой. Вектор n, перпендикулярный данной прямой, называется нормальным вектром этой прямой. В силу ортогональности векторов их скалярное произведение равно нулю:n \*M= 0, т. е. A()+B(; 5. Общее уравнение прямой на плоскости – это уравнение вида Ax+By+C = 0,в котором хотя бы один из коэффициентов A или B не равен 0, т.е.+≠ 0. Уравнение прямой на плоскости – это линейное уравнение (уравнение 1-й степени) относительно переменных x,y. Любое уравнение вида, где +≠ 0, задает некоторую прямую на плоскости. И обратно, любая прямая на плоскости может быть задана уравнением вида. 6. Уравнение прямой в отрезках – это уравнение прямой, пересекающей ось Ox в точке a, а ось Oy – в точке b. Получим это уравнение как уравнение прямой, проходящей через две заданные точки M1(a;0); M2(0;b). Тогда по формуле имеем ;;-Уравнение прямой в отрезках удобно использовать для построения прямой, заданной общим уравнением и пересекающей оси координат. 7. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Прямая, пересекающая ось Oy, может быть задана точкой M0(0;b) пересечения с осью Oy и углом ϕ наклона прямой к оси Ox. Опр. 1. Угловым коэффициентом прямой на плоскости называется число k = tgϕ, где ϕ – угол наклона прямой к оси Ox. Пусть M(x;y) – произвольная точка этой прямой. Проведем прямые M0N и MN параллельно осям Ox и Oy соответственно. Тогда N ( x; b). Из прямоугольного треугольника M0MN получим k=tgϕ=.Выражая y, получим уравнение прямой, пересекающей ось Oy, в точке b и имеющей угловой коэффициент k = ϕ tg , в виде y= kx +b . 8. Уравнение прямой, проходящей через данную точку с заданным угловым коэффициентом k. Это уравнение будет иметь вид с неизвестным значением b. Чтобы найти значение b, учтем, что координаты точки должны удовлетворять уравнению, т. е. y0= kx0+b. Вычитая это равенство из уравнения, получим искомое уравнение; Расстояние от точки до прямой Ax+By+C= 0 вычисляется по формуле

**43. Взаимное расположение двух прямых на плоскости. Условия параллельности и перпендикулярности прямых на плоскости.** 1. Если прямые заданы своими каноническими уравнениями, то известны их направляющие векторы. Тогда формула для нахождения угла между прямыми и условия параллельности и перпендикулярности прямых аналогичны случаю прямых в пространстве. 2. Если прямые заданы своими общими уравнениями, то известны их нормальные векторы. Тогда формула для нахождения угла между прямыми и условия параллельности и перпендикулярности прямых аналогичны случаю плоскостей в пространстве. 3. Пусть две прямые заданы своими уравнениями с угловыми

коэффициентами:+ +. Имея угловые коэффициенты прямых, знаем углы ϕ1 и ϕ2 наклона прямых к оси Ox, поскольку =tgϕ1 , = tgϕ2 . Пусть ϕ = ϕ2−ϕ1– угол между прямыми и . Применяя формулу для тангенса разности двух углов, получим tgϕ= tg(ϕ2− ϕ1)= ,откудa tgϕ=; Замечание. По этой формуле определяется тангенс угла ϕ, на который нужно повернуть прямую l1 в положительном направлении (т. е. против часовой стрелки) до совпадения с прямой l2. Для нахождения острого угла между прямыми следует взять правую часть формулы по модулю. Условие параллельности двух прямых на плоскости. Прямые 1 l и 2l параллельны тогда и только тогда, когда k1= k2. Условие перпендикулярности двух прямых на плоскости. Прямые l1 и l2 перпендикулярны тогда и только тогда, когда k1k2=−1.

**44. Эллипс: определение, вывод канонического уравнения, фокусы эллипса.** Эллипсом называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная и большая, чем расстояние между фокусами. Вывод канонического уравнения эллипса. Обозначим фокусы эллипса через F1 и F2 , расстояние между фокусами через 2с, а сумму расстояний от произвольной точки эллипса до фокусов – через 2а. По определению, 2a >2c т. е. a > c. Выберем систему координат так, чтобы фокусы лежали на оси Ох симметрично относительно начала координат. Тогда F1(-c; 0); F2( c; 0). Пусть M(x;y) – произвольная точка эллипса. По определению, F1M+F2M= a2 .Тогда Поскольку a>c, то ; обозначим Тогда последнее уравнение преобразуется к видуили -каноническим уравнением эллипса; a – большая, b – малая полуось эллипса. Исследование формы эллипса по его уравнению. Установим форму эллипса, пользуясь его каноническим уравнением. 1. Уравнение содержит переменные x и y только в четных степенях, поэтому оси координат являются осями симметрии эллипса (осями эллипса), а начало координат O(0; 0) – центром симметрии (центром) эллипса. 2. Точки пересечения эллипса с его осями симметрии называются его вершинами. В данном случае это точки (a ; 0); (-a ;0); (0;b); (0;-b) . 3. Из уравнения следует, что каждое слагаемое в левой части не превосходит 1: поэтому |x|≤ a; |y|≤ b Следовательно, эллипс лежит внутри прямоугольника, ограниченного прямыми x=+-a;y=+-b. Одной из характеристик формы линий второго порядка является эксцентриситет. Для эллипса эксцентриситет определяется как отношение половины расстояния между фокусами к большой полуоси эллипса: ε =c/a; Поскольку a > c, то0≤ ε < 1В предельном случае при ε = 0 эллипс превращается в окружность. Чем меньше ε, тем ближе эллипс по форме к окружности; чем больше ε, тем больше эллипс сжат к своей большой оси. Замечание. Изобразить эллипс можно с помощью карандаша и нити длиной 2а, закрепив концы нити в фокусах F1 и F2 эллипса. Тогда, натягивая нить, карандаш нарисует линию, которая и будет эллипсом.

**45. Гипербола: определение, вывод канонического уравнения, фокусы гиперболы, асимптоты гиперболы.** Гиперболой называется множество всех точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная и меньшая, чем расстояние между фокусами. Вывод канонического уравнения гиперболы. Обозначим фокусы гиперболы через F1 и F2 , расстояние между ними через 2с, а модуль разности расстояний от произвольной точки гиперболы до фокусов – через 2а, причем a < c. Выберем систему координат так, чтобы фокусы лежали на оси Ох симметрично относительно начала координат, т. е. F1 (− c; 0); 2 F ( c; 0). Согласно определению, для произвольной точки M (x;y) на гиперболе должно выполняться соотношение -.Тогда Поскольку a<c, обозначим Тогда последнее уравнение преобразуется к видуили -каноническое уравнение гиперболы;a – действительная, b – мнимая полуось гиперболы. Исследование формы гиперболы по ее уравнению. Установим форму гиперболы, пользуясь ее каноническим уравнением. 1. Уравнение содержит переменные x и y только в четных степенях, поэтому оси координат являются осями симметрии гиперболы (осями гиперболы), а начало координат O(0; 0) – центром симметрии (центром) гиперболы. 2. Точки пересечения гиперболы с ее осями симметрии называются вершинами гиперболы. В данном случае это точки ( a; 0);(-a; 0). Отметим, что гипербола пересекает ось Ox (действительную ось гиперболы) и не пересекает ось Oy (мнимую ось гиперболы). 3. Из уравнения следует, что поэтому | x |≥ a, т. е. точки гиперболы расположены либо правее прямой x a = , либо левее прямой x = − a. Прямоугольник, заключенный между прямыми x = ±a ;y = ± b называется основным прямоугольником гиперболы. Его удобно использовать для построения гиперболы. 4. Прямые , − проходящие через противоположные вершины основного прямоугольника гиперболы, являются асимптотами гиперболы, поскольку точки гиперболы, бесконечно удаляясь от начала координат, приближаются к этим прямым. Эксцентриситет гиперболы определяется как отношение половины расстояния между фокусами к действительной полуоси гиперболы: . ε = c/a Поскольку a<c, то ε >1. Замечание. Для гиперболы действительной осью является ось Oy, так как эта гипербола пересекает ось Oy и не пересекает ось Ox. Поэтому точки (0; b); (0; − b) – вершины гиперболы, b – действительная, a – мнимая полуоси; фокусы гиперболы F1 (0; c); F2 (0; − c) лежат на ее действительной оси. Отметим, что фокусы эллипса лежат на его большой оси. Опр. 4. Две прямые, перпендикулярные большой оси эллипса и расположенные симметрично относительно центра эллипса на расстоянии a/ε (где a – большая полуось) от центра эллипса, называются директрисами эллипса. Опр. 5. Две прямые, перпендикулярные действительной оси гиперболы и расположенные симметрично относительно центра гиперболы на расстоянии a/ε (где a – действительная полуось) от центра гиперболы, называются директрисами гиперболы. Т 1. Отношение расстояния от произвольной точки эллипса (гиперболы) до какого-либо фокуса к расстоянию от этой точки до соответствующей этому фокусу директрисы постоянно и равно ε : MF1/MM1 = ε.Итак, если линия на плоскости обладает тем свойством, что для всех ее точек отношение расстояния до фиксированной точки к расстоянию до фиксированной прямой постоянно и равно ε, то: в случае ε >1 эта линия – гипербола; в случае ε <1 эта линия – эллипс; в случае ε =1 эта линия – парабола.

**46. Парабола: определение, вывод канонического уравнения, фокус и директриса параболы.** Парабола – множество всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой. Вывод канонического уравнения параболы. Обозначим фокус параболы через F, расстояние между фокусом и директрисой через p. Выберем систему координат так, чтобы ось Ох проходила через фокус F перпендикулярно директрисе в направлении от директрисы к фокусу, а начало координат расположим посередине между фокусом и директрисой. Тогда F( а уравнение директрисы х=. Для произвольной точки M (x;y) на параболе, согласно определению, приравняем расстояния от этой точки до фокуса и до директрисы: *.*Возводя в квадрат, имеем откуда получим каноническое уравнение параболы , где p – расстояние от фокуса до директрисы параболы – называется параметром параболы. Исследование формы параболы по ее уравнению. 1. В уравнение переменная y входит в четной степени, поэтому ось Ox является осью симметрии параболы (осью параболы). 2. Точка пересечения параболы с ее осью симметрии называются вершиной параболы. В данном случае это O(0; 0). 3. Из (3) следует, что x ≥ 0, т. е. парабола расположена правее оси Oy. Замечание 1. Каноническое уравнение параболы может быть записано в одной из четырех форм. Замечание 2. Параметр p > 0 отвечает за форму параболы, чем больше p, тем шире область, ограниченная параболой.

**47. Различные виды уравнения плоскости. Расстояние от точки до плоскости**. При составлении уравнения плоскости весьма плодотворно используются элементы векторной алгебры, а именно свойства скалярного, векторного и смешанного произведений векторов. Плоскость в пространстве однозначно задается: - тремя точками, лежащими в этой плоскости; - вектором, перпендикулярным плоскости, и точкой, лежащей в этой плоскости. Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки M1 (x1; y1; z1), M2 ( x2; y2; z2), M3(x3;y3; z3) Пусть M(x;y;z) – произвольная точка этой плоскости. Точки M,M1, M2, M3 лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда векторы M1M, MM2, M1M2 компланарны, т. е. их смешанное произведение равно 0. Найдем координаты этих векторов: M1M={x-x1; y-y1;z-z1}; M1M2={x2-x1; y2-y1;z2-z1}; M1M3={x3-x1; y3-y1;z3-z1}. Записав условие компланарности трех векторов (смешанное произведение равно нулю) в координатной форме, получим уравнением плоскости, проходящей через три заданные точки: ; Уравнение плоскости, проходящей через данную точку M0(x0 ;y0 ;z0) перпендикулярно заданному вектору n={A;B;C}.Опр. 1. Вектор, перпендикулярный к плоскости, называется вектором нормали к этой плоскости, или нормальным вектором плоскости. Замечание. Вектор нормали к плоскости определяется неоднозначно. Если n ={ A; B; C} – нормальный вектор плоскости, то любой ненулевой вектор, коллинеарный данному, также является вектором нормали к этой плоскости. Пусть плоскость имеет нормальный вектор n ={ A; B; C} и проходит через точку M0(x0;y0;z0). Пусть M (x;y;z) – произвольная точка этой плоскости. Она принадлежит плоскости тогда и только тогда, когда векторы n={A;B;C } и M0M={x-x0; y-y0;z-z0}будут ортогональны, а значит, их скалярное произведение равно нулю:n\*M0M=0.Записав скалярное произведение векторов через координаты сомножителей, получим искомое уравнение плоскости в виде A(x-x0)+B(y-y0)+C(z-z0)=0 Итак, уравнение любой плоскости можно записать в виде уравнения, линейного относительно переменных x y z.Общее уравнение плоскости Ax+By+Cz+D= 0, причем коэффициенты A,B,C являются координатами вектора нормали к этой плоскости: n ={A;B; C }. Т 1. Пусть в трехмерном пространстве задана система координат Oxyz. Тогда всякое уравнение вида (3), т. е. линейное уравнение (уравнение 1-й степени) относительно переменных x, y, z в котором хотя бы один из коэффициентов A,B,C не равен нулю, задает некоторую плоскость в пространстве. И обратно, любая плоскость в пространстве может быть задана уравнением вида. Расстояние от точки до прямой Ax+By+Cz+D= 0 вычисляется по формуле

**48. Различные виды уравнений прямой в пространстве. Взаимное расположение прямых в пространстве.** Прямая в пространстве может быть задана: - двумя точками; - точкой и направляющим вектором; - как пересечение двух плоскостей. Уравнения прямой, проходящей через две заданные точки ,. Пусть M(x;y;z) – произвольная точка этой прямой. Точки M, лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда векторы и коллинеарны, т. е. их координаты пропорциональны: =; Канонические уравнения прямой Напишем уравнения прямой, проходящей через данную точку, параллельно заданному вектору s ={ m; n; p }.Опр. 1. Вектор, параллельный прямой, называется направляющим вектором этой прямой. Замечание. Направляющим вектором прямой является любой вектор, параллельный этой прямой. Точка , лежит на этой прямой тогда и только тогда, когда векторы M0M и s коллинеарны, т. е. их координаты пропорциональны:; Параметрические уравнения прямой.Уравнения можно записать в виде системы трех уравнений{x=; Общие уравнения прямой Общими уравнениями прямой в пространстве называются{ 1 т. е. прямая задается как пересечение двух плоскостей. Взаимное расположение двух прямых определяется взаимным расположением их направляющих векторов. Пусть заданы две прямые: l1:; l2:; Зная канонические уравнения прямых, имеем их направляющие векторы: s1 ={ m1; n1; p1} – направляющий вектор прямой l1; : s2 ={ m2; n2; p2} – направляющий вектор прямой l2 . Угол между двумя прямыми – это угол между прямыми, параллельными данным и проходящими через одну точку, – равен углу между направляющими векторами s1 и s2 этих прямых. Поэтому косинус угла между прямыми l1 и l2 определяется формулой или ; Замечание. Для нахождения острого угла следует взять модуль правой части.

**49. Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.** Условия параллельности и перпендикулярности. Взаимное расположение двух прямых определяется взаимным расположением их направляющих векторов. Пусть заданы l:и плоскость π: Ax+ By+ Cz +D = 0. Взаимное расположение прямой l и плоскости π определяется взаимным расположением направляющего вектора прямой s ={ m; n; p } и нормального вектора плоскости n = { A; B; C }. Угол между векторами s и n равен либо 90°− ϕ,либо 90°+ϕ, где где ϕ – угол между прямой l и плоскостью π. Следовательно, cos(90-+ а значит, sin(90-+ , т. е. синус угла ϕ между прямой l и плоскостью π может быть найден по формуле ; Замечание. Поскольку sinϕ≥0, то числитель дроби взят по модулю. Условие параллельности прямой и плоскости. Прямая l и плоскость π параллельны тогда, когда s⊥n , или n⋅s = 0. Переходя к координатам векторов, получим условие прямой и плоскости в виде ; Условие перпендикулярности прямой и плоскости. Прямая l и плоскость π перпендикулярны тогда и только тогда, когда n s, т. е. координаты этих векторов пропорциональны:

**50. Поверхности 2-го порядка. Метод сечений. Цилиндрические поверхности.** Поверхностью 2-го порядка называется поверхность, определяемая в декартовой прямоугольной системе координат в пространстве алгебраическим уравнением 2-й степени с тремя переменными, т. е. уравнением вида ++в котором хотя бы один из коэффициентов не равен 0. В зависимости от значений коэффициентов это уравнение определяет поверхности следующих типов: 1) эллиптический (эллипсоид, частный случай – сфера); 2) гиперболический (однополостный и двуполостный гиперболоиды, коническая поверхность); 3) параболический (эллиптический и гиперболический параболоиды); 4) цилиндрические поверхности (эллиптический, гиперболический, параболический цилиндры, пара пересекающихся или пара параллельных плоскостей). Для того чтобы определить тип поверхности, ее уравнение приводят к наиболее простому каноническому виду. Как и в случае кривых 2-го порядка, это можно сделать с помощью замены переменных, которая сводится к повороту и параллельному переносу системы координат. Метод сечений При изучении формы поверхностей используется метод сечений, который состоит в том, что поверхность рассекают плоскостями и по виду линий пересечения делают вывод о форме самой поверхности. Для простоты в качестве секущих плоскостей рассматривают координатные плоскости и им параллельные. Цилиндрической поверхностью, или цилиндром, называется поверхность, которую можно получить перемещением прямой L, которая называются образующей, параллельно самой себе вдоль некоторой кривой K, которая называется направляющей. Цилиндрическая поверхность называется цилиндрической поверхностью 2-го порядка, если ее направляющей является одна из линий 2-го порядка. Уравнение 2-й степени с двумя переменными определяет в пространстве цилиндрическую поверхность с образующей, параллельной той координатной оси, переменная которой отсутствует в уравнении. Так, уравнение любой цилиндрической поверхности, образующая которой параллельна оси Oz, имеет вид F (x; y) =0. Рассмотрим цилиндрические поверхности 2-го порядка с образующими, параллельными оси Oz: - эллиптический цилиндр ; - гиперболический цилиндр ; -параболический цилиндр

**51. Комплексные числа и действия над ними. Три формы записи комплексных чисел. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме записи.** Множество комплексных чисел – это множество С={z=x+iy:x,y∈R,. Для комплексного числа z=x+iy вводятся следующие понятия: x=Rez − действительная часть, y=Imz − мнимая часть комплексного числа z. Множество действительных чисел является подмножеством множества комплексных чисел: R⊂ C, поэтому Ν⊂Ζ⊂Q⊂R⊂C. Числа 3i, 5i, −2i и т. д., т. е. числа вида iy, называются чисто мнимыми числами. Два комплексных числа считаются равными тогда и только тогда, когда соответственно равны их действительные и мнимые части: если z1=x1+iy1,z2=x2+iy2,то z1=z2m<=> {y1=y2;x1=x2; Неравенства z1>z2, z1, и т. д. для комплексных чисел не имеют смысла. Геометрическая интерпретация комплексных чисел Комплексные числа изображаются на плоскости (комплексной плоскости) точками либо векторами: числу z= x+iy соответствует точка с координатами (x;y) либо вектор, проекции которого на оси координат равны соответственно x = Rez и y= Imz. Оси Ox и Oy называются соответственно действительной и мнимой осями. Действительные числа являются частным случаем комплексных, когда мнимая часть равна 0, и заполняют действительную ось. Опр. 3. Число z = x−iy называется комплексно сопряженным числу z=x+iy и изображается на комплексной плоскости точкой, симметричной точке z относительно действительной оси. Действия над комплексными числами осуществляются по обычным правилам. Нужно только помнить, что i^2 = −1. При делении комплексных чисел, чтобы избавиться от мнимой единицы в знаменателе, домножают числитель и знаменатель на число, комплексно сопряженное знаменателю. Различные формы записи комплексных чисел.Число r=|z|= называется модулем, а число ϕ, удовлетворяющее соотношениям cosϕ= x /r , sinϕ=y/r - аргументом комплексного числа z = x+iy . Значение аргумента, удовлетворяющее условию 0 ≤ ϕ < 2π, называется главным и обозначается arg z. Геометрически модуль комплексного числа равен длине вектора, изображающего это число, а аргумент − это угол между положительным направлением оси Ox и этим вектором. Существует три формы записи комплексных чисел: алгебраическая z=x+ iy; тригонометрическая z =r(cosϕ+isinϕ); • показательная z=. Связь между тригонометрической и показательной формами записи комплексного числа определяется формулой Эйлера Действия над комплексными числами в тригонометрической и показательной формах записи Умножение и деление комплексных чисел, возведение в натуральную степень и извлечение корня удобно проводить в тригонометрической форме. Если z1== r1(cosϕ+isinϕ); z2== r2(cosϕ+isinϕ); z1z2= z1/z2=\* Отсюда получаем следующие правила умножения и деления комплексных чисел, представленных в тригонометрической форме записи: - при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются: z1z2= - при делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются: z1/z2=\* Следовательно, для возведения числа z r = (cosϕ +isinϕ) в степень n∈Ν его модуль возводится в степень n, а аргумент умножается на n: При r=1 получаем формулу(cosϕ+isinϕ)^n= cosnϕ+sinnϕ ,которая называется формулой Муавра.

**52. Многочлены. Теорема Безу. Основная теорема алгебры.** Многочленом степени n от одной переменной x называется функция вида P(x)=+ где n – неотрицательное целое число, числа a называются коэффициентами многочлена, причем ≠ 0;-старший коэффициент многочлена; старший член многочлена; -свободный член. Два многочлена называются равными, если их степени равны и все коэффициенты при одинаковых степенях переменной совпадают. Многочлены можно складывать, вычитать и умножать друг на друга. При сложении (вычитании) многочленов P(x) и S(x) степеней и m соответственно получается многочлен степени k ≤ max{ m ;n }. При умножении многочленов P(x) и S(x) всегда получается многочлен степени n + m. Деление одного многочлена на другой нацело не всегда возможно. Т 2 [Безу]. Остаток от деления многочлена P(n) на x- x0, где x0 – некоторое число, равен значению этого многочлена при x =x0 :R(x)=P(x0). Доказательство. По теореме о делении с остатком, P(x)=(x-x0)Q(x)+R(x), причем степень R(x) меньше 1, т. е. R(x)=R – некоторое число. При x=x0 имеем P(x0)=(x0-x0)Q(x0)+R=0\*Q(x0)+R=R, Следовательно,P(x0)=R. Опр. 4. Число x0 называется корнем многочлена P(x), если P(x0)=0. Следствие теоремы Безу. Многочлен P(x) делится на x−x0 тогда, когда x0 является корнем этого многочлена. Если x0– корень многочлена P(x) , то этот многочлен можно записать в виде P(x)=(х-х0)Q(х), где Q(x) – некоторый многочлен. Следствие (ОТА – основная теорема алгебры). Всякий многочлен n-й степени имеет ровно n комплексных корней с учетом их кратности. Доказательство. Пусть дан многочлен P(x) степени n. По теореме Гаусса он имеет корень, обозначим этот корень x1; по следствию из теоремы Безу P(х)=(х-х1)(x).Аналогично многочлен (x) имеет корень x2 и (x) =(x-x2) (x);…; (x) =(x-xn) (x) причем Q0(x)=A – многочлен нулевой степени, т. е. число. Следовательно, P(х)=A(х-х1) (х-х2)… (х-хn).Очевидно, число A равно старшему коэффициенту многочлена P(x), т. е. A=a0. Поэтому P(х)=a0(х-х1) (х-х2)…(х-хn).Числа x1,x2,...,xn являются корнями многочлена P(x) причем из следует, что никакое другое число x0 , отличное от чисел x1,x2,…,xn не может быть корнем многочлена P(x). Из представления следует, что числа x1,x2,xn являются корнями многочлена P(x),но среди них могут быть совпадающие. Если в одинаковые множители собрать вместе, то получим P(х)=a0…, где x1, x2,…, xk – различные комплексные корни многочлена P(x), r1, r2,… ,rk – натуральные числа, r1+r2+...rk=n.Это означает следующее. Утв. 1. Любой многочлен n-й степени с действительными или комплексными коэффициентами на множестве комплексных чисел может быть разложен в произведение линейных множителей. Рассмотрим многочлен P(x) с действительными коэффициентами. Если комплексное число z=u+iv является корнем многочлена P(x) с действительными коэффициентами, то z = u − iv также является корнем этого многочлена. Любой многочлен n-й степени с действительными коэффициентами на множестве действительных чисел может быть разложен в произведение линейных и квадратичных множителей, т. е. представлен в виде P(х)=a0… . Любой многочлен n-й степени с действительными или комплексными коэффициентами на множестве комплексных чисел может быть разложен в произведение линейных множителей.

53. Линейные пространства, примеры. Простейшие свойства линейных пространств. Линейным (или векторным) пространством называется множество L элементов произвольной природы, если определены операция сложения элементов, ставящая в соответствие каждой паре элементов x, y ∈ L единственный элемент x +y ∈L , и операция умножения элементов на действительные числа, ставящая в соответствие каждому элементу x∈L и каждому числу α ∈Ρ единственный элемент αx∈L, причем заданные операции удовлетворяют следующим 8 аксиомам: для любых x,y,z∈L и любых α β∈ R;1) x+y=y+x(коммутативность сложения); 2) (x+y)+z=x+ (y+z) (ассоциативность сложения); 3) существует нейтральный (нулевой) элемент 0∈ L такой, что x+0 =х для всех x∈L ; 4) для каждого x∈L существует противоположный элемент − x∈L такой, что x+(- x) =0; 5)1x=x;6) α(х+у) = αх + αy(дистрибутивность умножения на число относительно сложения элементов); 7) (α + β)х = αх +βx(дистрибутивность умножения элемента на число относительно сложения чисел); 8) α(βх) = (αβ)x(ассоциативность умножения на число). Замечание. Элементы линейного пространства часто называют векторами. Непосредственно из аксиом линейного пространства можно получить ряд простейших свойств. Т 1. В произвольном линейном пространстве L: 1) нулевой элемент единственен; 2) для каждого x∈L существует единственный противоположный элемент. Доказательство. 1) В аксиоме 3 линейного пространства не утверждается, что нулевой элемент должен быть единственным. Но из аксиом 1 и 3 в совокупности это вытекает. Пусть существуют два нулевых элемента 01 ∈ L и 02 ∈ L Тогда 01=01+02=02+01=02. Здесь в первом равенстве использован тот факт, что 02 – нулевой элемент, второе следует из коммутативности сложения, а третье справедливо в силу того, что 01 – нулевой элемент. Следовательно, элементы 01 и 02 совпадают. 2) Пусть для некоторого x∈L существует два противоположных элемента (-x)1∈ L и (-х)2∈L. Рассмотрим сумму ((-х)1+ х)+(−х)2. В силу аксиомы 2 эта сумма не зависит от порядка выполнения двух операций сложения. Меняя порядок сложения, получаем: ((-х)1+ х)+(−х)2=0+(-х)2=(-х)2, (-х)1+( х+(−х)2)=(-х)1+0=(-х)1 т. е. оба противоположных элемента совпадают. В произвольном линейном пространстве L: 1) 0x = 0 для всех x∈L; 2) −1х= −x для всех x∈L; 3) α0 = 0 для всех α ∈R (либо для всех α ∈C, если рассматривается комплексное линейное пространство) ; 4)αx= 0⇔ либо α = 0, либо x = 0.

54. Понятия линейной зависимости и линейной независимости элементов линейного пространства. Базис и размерность линейного пространства, примеры. Линейной комбинацией элементов x1, x2,…,xn∈L с числовыми коэффициентами α1, α2, …αn называется элемент y=α1x1+α2x2+...+αnxn∈L. Система (множество) элементов x1,x2,… ,xn∈L называется линейно зависимой, если существуют такие числа α1,α2,…,αn из которых хотя бы одно не равно 0, что α1x1+α2x2+...αnxn=0. Система (множество) элементов x1, x2,…, xn∈L называется линейно независимой, если равенство α1x1 + α2x2 +…+ αnxn = 0 возможно только в случае, когда все коэффициенты линейной комбинации равны 0, т. е. α1=α2 ...= αn=0; Система элементов x1,x2,..., xn ∈L линейно зависима тогда, когда хотя бы один из них является линейной комбинацией остальных. Свойства линейно зависимых и линейно независимых систем элементов:1. Всякая система элементов, содержащая нулевой элемент, линейно зависима. 2. Если часть системы элементов образует линейно зависимую систему, то и вся система линейно зависима.3. Если система элементов линейно независима, то и любая ее подсистема (часть) линейно независима. 4. Если элементы x1, x2,…, xn∈L линейно независимы и элемент y∈L не является их линейной комбинацией, то система элементов x1,x2,…,xn, y∈L линейно независима. Опр. 1. Размерностью линейного пространства L называется такое число , dimL=n что: 1) в L существует n линейно независимых элементов; 2) любая система из n +1 элемента линейно зависима. Таким образом, размерность линейного пространства – это максимальное число линейно независимых элементов этого пространства. Размерность нулевого линейного пространства считается равной 0. Опр. 2. Линейное пространство L называется бесконечномерным (dim L) = ∞, если при любом натуральном n существует система n линейно независимых элементов этого пространства. Базисом линейного пространства L называется такая упорядоченная система {e1;e2;…;en} состоящая из n линейно независимых элементов этого пространства, что любой элемент x∈ L может быть представлен в виде линейной комбинации базисных элементов:x=x1e1+x2e2+…+xnеn. Представление называется разложением элемента x по базису {e1; e2;…;en} а числа x1,x2,…,xn – координатами элемента x в базисе {e1; e2; …;en} в этом случае пишут x={x1,x2;…;xn;}. Пусть в линейном пространстве L задан базис {e1; e2;…;en}. Тогда: 1) все координаты нулевого элемента равны 0; 2) два элемента равны тогда, когда равны их соответствующие координаты в данном базисе; 3) при сложении двух элементов складываются их соответствующие координаты; 4) при умножении элемента на число все координаты умножаются на это число. Базис линейного пространства L состоит из n элементов тогда, когда dimL=n;

55. Координаты элемента линейного пространства в заданном базисе. Преобразование координат при изменении базиса. В линейном пространстве все базисы равноправны. Тот или иной базис выбирают исходя из конкретных обстоятельств или произвольно. Иногда удобно использовать для представления элементов линейного пространства несколько базисов, но тогда естественным образом возникает задача преобразования координат векторов, которое связано с изменением базиса.Пусть E={e1, e2,…;en} – базис линейного пространства L;E′={e’1;e’2; …;e’n}– новый базис линейного пространства L, причем (любой вектор пространства L может быть представлен в виде линейной комбинации векторов базиса E)e’1=t11e1+t21e2+…+tn1en;e’2=t12e1+t22e2+…+tn2en,…en=t1ne1+tn2e2+…+tnmen;

Опр. 5. Матрица T=называется матрицей перехода от базиса E к базису E .′ Согласно данному определению, i-й столбец матрицы перехода есть столбец координат i-го вектора нового базиса в старом. Поэтому говорят, что матрица перехода состоит из координат векторов нового базиса в старом, записанных по столбцам. Замечание. Поскольку векторы e1’;e2’…en’ линейно независимы, то матрица перехода является невырожденной матрицей: detT 0. Если X=( и X’=( – столбцы координат элемента x∈L в базисе E и в базисе E′ соответственно, то X=TX′. X′ =T^-1X, где T – матрица перехода от базиса E к базису E’. Матрица перехода от базиса E′ к базису E – это матрица, обратная матрице перехода от базиса E к базису E′: . Изоморфизм линейных пространств Опр. 6. Два линейных пространства L1 и L2 называются изоморфными, если между их элементами можно установить такое взаимно однозначное соответствие, что если x1 ↔y1 , x2 ↔y2 , где x2, x1∈ L1 , y1, y2∈L, то x1+ x2↔ y1+ y2 и αx1↔ αy1 для всех α ∈R. Из определения изоморфизма следует, что линейно зависимым векторам из L1 соответствуют линейно зависимые векторы из L2, и обратно. Поэтому размерности изоморфных пространств одинаковы, а пространства разной размерности не могут быть изоморфны друг другу. Два линейных пространства L1 и L2 изоморфны, когда dimL1 = dimL2. Таким образом, все линейные пространства одинаковой размерности изоморфны друг другу. Поэтому любое n-мерное действительное линейное пространство можно отождествлять с Ρ(n) рассматривая его элементы как столбцы координат в некотором фиксированном базисе

56. Подпространства линейного пространства. Операции над подпространствами. Непустое подмножество L′ действительного линейного пространства L называется линейным подпространством пространства L, если для любых x,y ∈ L′ и α ∈R элементы x+y∈L′, αx∈L′. Утв. 1. Подпространство само является линейным пространством, причем dimdimL. . Пусть x, y,…,z – элементы линейного пространства L. Линейной оболочкой элементов x, y,…, z называется множество всех линейных комбинаций этих элементов: L( x, y,…,z) = {αX + βY + …+ γz:α,β,…, γ ∈R} Линейную оболочку элементов x, y,…,z обозначают L(x, y,…,z) либо <x, y,…,z>. Иногда также говорят, что линейная оболочка натянута на векторы x, y,…,z. Линейная оболочка L( x, y,…,z) является наименьшим подпространством, содержащим элементы x, y,…,z.Размерность линейной оболочки L(x, y,…,z) равна максимальному числу линейно независимых элементов в системе элементов x, y,…,z. Операции над подпространствами: Пусть L1 и L2 – два линейных подпространства одного и того же линейного пространства L. Пересечением L1∩L2 подпространств L1 и L2 называется множество всех элементов, принадлежащих одновременно и L1, и L2: L1∩L2 = {x∈L: x∈L1,x∈L2}. Очевидно, что L1∩L2 также является подпространством линейного пространства L. Суммой L1+L2 подпространств L1 и L2 называется множество всех элементов вида z=x+y, где x∈L1, y∈L2 , т. е. L1+L2={z=x+y:x∈L1,y∈ L2}. . Пусть L1 и L2 – два подпространством одного и того же линейного пространства L. Тогда dim(L1+L2)=dimL1+dimL2-dim(L1∩L2 )

57. Линейные операторы и их матрицы. Действия над линейными операторами. Преобразование матрицы линейного оператора при замене базиса. Пусть L1 и L2 – два линейных пространства. Если задано правило f, по которому каждому элементу x∈L1 ставится в соответствие некоторый элемент y∈L2 , то говорят, что задан оператор (отображение, преобразование), действующий из L1 в L2:f: L1 →L2 ; при этом элемент y=f(x) называется образом элемента x, а элемент x – прообразом элемента y (при данном отображении f). Отображение, при котором каждый элемент y∈L2 имеет единственный прообраз (иными словами, разным элементам x1, x2 ∈L1,x1≠ x2,соответствуют разные образы y1, y2 ∈L1,y1≠ y2 ) называется взаимно однозначным, или биективным. Замечание. Отображения, которые мы будем рассматривать, не обязательно будут взаимно однозначными.Оператор f: L1→L2 называется линейным, если для любых элементов x1, x2, x∈L и любого числа α ∈R (либо α ∈C, если рассматриваются комплексные линейные пространства) выполняются условия: 1)f (x1+ x2)= f (x1)+f(x2);2) f(αx) = αf(x). Оператор f: L1→L2 является линейным тогда и только тогда, когда для любых элементов x1, x2∈L1, и любых α, β∈R(либо α β∈ C в случае комплексных линейных пространств) выполняется условие f(αx1 + βx2) = αf(x1) + βf(x2) . Оператор I :L → L , действующий по правилу I(x) =x, называется тождественным оператором. Действия с линейными операторами. Суммой двух линейных операторов f: L1→L2 и g: L1→L2 называется оператор h=f+g:L1→L2 , действующий так, что для любого x∈L1 справедливо h(x)=f (x)+g (x). Сумма линейных операторов является линейным оператором. Очевидно, что f+g=g+f(сложение операторов коммутативно). Произведением линейного оператора f: L1→L2 на число λ называется оператор h= λf :L1 →L2 , действующий по правилу h(x)= λf(x) для любого x∈L1. Очевидно, что при умножении линейного оператора на число получается линейный оператор. Произведением (композицией) линейного оператора f:L1→L2 на линейный оператор g:L2→L3 называется оператор h gοf : L1→L3 , действие которого заключается в последовательном действии операторов f и g, т. е. h(x)=g(f(x)) для любого x∈L1. Произведение оператора f на оператор g обозначают h=gοf или h=gf . Замечание 1. Оператор, действующий первым, записывается справа. Замечание 2. Как правило, gf≠fg , т. е. операция умножения операторов не коммутативна. Оператор ϕ: L → L называется обратным к данному оператору f: L→ L если ϕοf=I и fοϕ =I . Оператор, обратный к оператору f , обозначается f^-1. Если f :L→L – линейный оператор и оператор f^-1 − существует, то f^-1 − – тоже линейный оператор. . Если f: L→L – линейный оператор, то обратный оператор f^-1 − существует тогда, когда f – взаимно однозначный оператор. Пусть f:L1→L2 – линейный оператор и линейные пространства L1 и L2 конечномерны. Выберем базисы: E = {e1, e2;...; en} – базис линейного пространства L1; F = { f1, f2; ...; fm} – базис линейного пространства L2. Элементы f(e1), f(e2),…,f(en) (образы базисных векторов линейного пространства L1 при отображении f) являются элементами линейного пространства L2, а значит, их можно разложить по базису F : f(e1)=a11f1+a21f2+…+am1fm, f(e2)=a12f1+a22f2+…+am2fm, f(en)=a1nf1+a2nf2+…+amnfm. Матрица A= столбцы которой состоят из координат векторов f(e1), f(e2),…,f(en) называется матрицей линейного оператора f . Если X=(и Y=( – столбцы координат элемента x∈L1 в базисе E и его образа y=f(x)∈L2 в базисе F соответственно, то Y=X . Действиям над линейными операторами соответствуют такие же действия над их матрицами (в соответствующих базисах): 1) 2) = λ(λ– число); 3) ; ;4) ;5) матрица тождественного оператора является единичной: =E. Таким образом, линейные преобразования описываются с помощью матриц и действия над линейными преобразованиями сводятся к действиям над их матрицами. Линейный оператор f: L→L называется невырожденным, если его матрица невырожденная, т. е. det≠ 0. Линейный оператор f:L→L является невырожденным тогда и только тогда, когда f – взаимно однозначный оператор. Преобразование матрицы линейного оператора при изменении базиса Пусть E = {e1; e2; ...; en} – базис линейного пространства L;E′ ={e1’; e2’; ...; en’} – новый базис линейного пространства T= – матрица перехода от базиса E к базису E′. Если f:L→L – линейный оператор и – матрица линейного оператора f в базисе E, а ′ – матрица линейного оператора f в базисе E′, то

**58. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора.** Пусть f:L →L – линейный оператор, действующий в линейном пространстве L. Ненулевой элемент x∈L ( x ≠ 0) называется собственным вектором линейного оператора f:L→ L,если существует такое число λ, что f(x) = λx Число λ называется собственным значением (собственным числом) линейного оператора f, соответствующим собственному вектору x. Свойства собственных векторов: 1. Каждому собственному вектору соответствует единственное собственное значение. 2. Если x1 и x2 – два собственных вектора линейного оператора f с одним и тем же собственным значением λ, то x1 + x2 также является собственным вектором линейного оператора f с тем же собственным значением λ, т. е. f(x1)= λx1, f(x2)=λx2⇒ f(x1+x2)= λ(x1+x2). 3. Если x – собственный вектор линейного оператора f с собственным числом λ, то любой вектор αx (α – число) является собственным вектором линейного оператора f с тем же собственным значением λ, т. е. f(x)= λx⇒f(αx)=λ(αx). Собственные векторы x1, x2, ..., xk линейного оператора f, соответствующие попарно различным собственным значениям λ1, λ2,…,λk линейно независимы. Характеристический многочлен матрицы линейного оператора: Пусть f:L→L – линейный оператор, действующий в n-мерном линейном пространстве L. Зафиксируем некоторый базис E в пространстве L. Поскольку линейный оператор действует из L в L, логично рассматривать векторы и их образы в одном и том же базисе. Тогда матрица A= линейного преобразования состоит из столбцов координат образов базисных векторов в этом же базисе. Если x – собственный вектор линейного оператора f с собственным числом λ, матрица A – матрица линейного оператора f в базисе E, то AX=λX , где X – столбец координат вектора x в базисе E.Ненулевой столбец , X∈ удовлетворяющий AX= λX при некотором λ, называется собственным вектором матрицы A, соответствующим собственному значению λ. Рассмотрим способ нахождения собственных чисел и собственных векторов матрицы A (а следовательно, и оператора f). Преобразуем соотношение AX=λX , определяющее собственные векторы и собственные значения матрицы, следующим образом: AX=λX⇔AX=λEX ⇔(A-λE)X=O, где E – единичная матрица n-го порядка, O – нулевой столбец из . Пусть A= , X=(.Тогда последнее матричное уравнение примет (),  
 что равносильно системе линейных уравнений { Это однородная система линейных алгебраических уравнений. Она имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда матрица этой системы невырожденная, т. е. det( A-λE)= 0. Поэтому для нахождения собственных чисел матрицы A нужно решить уравнение det( A-λE)= 0 т. е. -характеристическое уравнение матрицы A, а его корни характеристические числа, собственные значения матрицы A. Многочлен n-й степени, стоящий в левой части характеристического уравнения, называется характеристическим многочленом матрицы A. Характеристический многочлен имеет n корней, вообще говоря, комплексных, с учетом их кратности. Замечание. Собственными значениями линейного оператора в действительном линейном пространстве являются только действительные корни характеристического уравнения. Т 1. Характеристический многочлен матрицы линейного оператора не зависит от выбора базиса.

59. Евклидово пространство. Неравенства Коши-Буняковского и треугольника. Евклидовым пространством называется действительное линейное пространство L, в котором определена операция скалярного умножения элементов: каждой паре элементов x,y∈L , ставится в соответствие действительное число (x,y), которое называется скалярным произведением элементов x и y, причем эта операция удовлетворяет следующим 4 аксиомам: для любых x, y, z∈L и любого α ∈R 1) (x,y)=(y,x);2) (x+y,z )=(x,z )+(y,z); 3) (αx,z)=α(x,z); 4) (x,x)≥ 0, причем (x,x)=0 ⇔x = 0. Векторы x и y евклидова пространства называются ортогональными, если (x,y) =0. Считается, что нулевой вектор ортогонален любому вектору. Если ненулевые векторы e1, e2,…, ek ортогональны, то они линейно независимы. Нормой вектора x евклидова пространства называется положительное число ||x||= . Свойства нормы вектора. 1.||x||=0 ⇔ x =0; 2.||αx|| = α||x|| для любого α ∈R. 3. (x,y)≤||x|||| y|| (неравенство Коши – Буняковского). 4. ||x+y||≤ ||x||+|| y||(неравенство треугольника). Если ||x|| =1, то вектор x называется нормированным. Система векторов e1, e2,…,en называется ортонормированной, если все ее векторы нормированы и попарно ортогональны. Во всяком конечномерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.

60. Ортонормированный базис в евклидовом пространстве. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта. Процесс ортогонализации Грама – Шмидта используется для построения в евклидовом пространстве ортонормированного базиса на основании произвольного базиса этого пространства. Пусть F ={ f1, f2,…, fn} – исходный базис n-мерного евклидова пространства. Ортонормированный базис E = {e1; e2;…; en} получается с помощью следующей процедуры: 1)e1= f1/||f1|| 2)g2=f2-(f2,e1)e1;e2=g2/||g2||;3)g3=f3-(f3,e1)e1-(f3,e2)e2;e3=g3/||g3||; n) gn=n-(fn,e1)e1-(fn,e2)e2-…-(fn,e(n-1))e(n-1); en=gn/||gn||. Система векторов e1, e2,…,en называется ортонормированной, если все ее векторы нормированы и попарно ортогональны. Во всяком конечномерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.